ANALISI VETTORIALE — ESERCIZI SULLE SUPERFICI

Esercizio 1 Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in E, \;\; z = 2 + x^2 + y^2\}$$

dove

$$E = \{(x, y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Risposta Essendo la superficie Σ data come grafico di una funzione $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ la sua area si calcola tramite

$$|\Sigma| = \iint_E \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy = \iint_E \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Passando a coordinate polari (in particolare con ρ da 1 fino a 2, non fino a 4!) si ottiene

$$|\Sigma| = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\theta d\rho = 2\pi \frac{1}{8}\frac{2}{3}\Big[(1 + 4\rho^2)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

Esercizio 2 Indicata con S la superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse z del grafico della funzione

$$x = 1 - \sqrt{1 - z^2}, \;\; z \in [-1, 1],$$

- determinare una rappresentazione parametrica di S,
- calcolare l'area di S,
- calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S z\, d\sigma.$$

Risposta I punti di S sono costituiti, al variare di $z \in [-1, 1]$, dalle circonferenze di raggio $1 - \sqrt{1 - z^2}$. La rappresentazione parametrica richiesta è dunque

$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{1 - v^2})\cos(u) \\ y = (1 - \sqrt{1 - v^2})\sin(u) \\ z = v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} -1 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{array}$$

La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} -(1 - \sqrt{1 - v^2})\sin(u) & (1 - \sqrt{1 - v^2})\cos(u) & 0 \\ \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\cos(u) & \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\sin(u) & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\begin{cases} L = -(1 - \sqrt{1 - v^2})\cos(u) \\ M = (1 - \sqrt{1 - v^2})\sin(u) \\ N = -\dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}}(1 - \sqrt{1 - v^2}) \end{cases}$$

e quindi

$$\sqrt{L^2+M^2+N^2} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1$$

Ne segue pertanto

$$Area = \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv = 2\pi\,(\pi + 2)$$

(Naturalmente il precedente procedimento conduce alla formula per il calcolo dell'area di una qualunque superficie di rotazione di $x = f(z),\ z \in [-1,1]$:

$$Area = 2\pi \int_{-1}^{1} f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}dz,$$

nel nostro caso

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-\sqrt{1-v^2})\sqrt{1+\frac{v^2}{1-v^2}}\,dv.)$$

L'integrale superficiale vale 0 per evidenti motivi di simmetria:

$$\iint_S z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^{1} v \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right\} dv = 0.$$

Esercizio 3 Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = u^2, \quad u \in [1,2],\ v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Risposta La matrice Jacobiana è

$$\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$\sqrt{L^2+M^2+N^2} = \sqrt{u^2+4u^4} = u\sqrt{1+4u^2}.$$

Ne segue che

$$Area(S) = \iint_S d\sigma = \frac{\pi}{2}\int_1^2 u\sqrt{1+4u^2}du = \frac{1}{24}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)\pi.$$

Esercizio 4 Siano

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2+y^2-1, \\ g(x,y) = 10-(3x^2+2xy+5y^2) \end{cases}$$

e sia

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

detto $\overrightarrow{\nu} = \{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$, calcolare i tre integrali superficiali

$$\iint_{\partial\Omega} z\,\nu_3\,d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\,\nu_1\,d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\,\nu_2\,d\sigma.$$

Risposta

Applichiamo il Teorema della divergenza per il calcolo dei tre integrali.

Primo integrale

$$\iint_{\partial\Omega} z\,\nu_z\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \{0,\,0,\,z\} \times \overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\{0,\,0,\,z\}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz =$$

$$= \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \left\{11 - 4\rho^2\cos^2(\theta) - 6\rho^2\sin^2(\theta) - 2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\right\} d\theta =$$

$$11\pi - 4\pi\frac{1}{4} - 6\pi\frac{1}{4} = \frac{17}{2}\pi$$

Secondo integrale

$$\iint_{\partial\Omega} x\,\nu_x\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \{x,\,0,\,0\} \times \overrightarrow{\nu}\,d\sigma =$$

$$= \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \frac{17}{2}\pi$$

Terzo integrale

$$\iint_{\partial\Omega} x\,\nu_y\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \{0,\,x,\,0\} \times \overrightarrow{\nu}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} 0\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Esercizio 5 Sia

$$\overrightarrow{F} = \frac{k}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,\{x,\,y,\,z\}$$

il campo elettrico generato da una carica posta nell'origine: calcolare il flusso uscente di $\overrightarrow{F}$ attraverso

- la superficie sferica
$$\mathbb{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
- l'ellissoide
$$\mathbb{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$
- il parallelepipedo
$$\mathbb{P} : 1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 6,\ 1 \leq z \leq 7$$

Risposta

Flusso attraverso la superficie sferica :$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\overrightarrow{\nu} = \{x,\,y,\,z\}$. Applichiamo la definizione

$$\iint_{\mathbb{S}} \frac{k}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,\{x,\,y,\,z\} \times \{x,\,y,\,z\}\,d\sigma = k \iint_{\mathbb{S}} d\sigma = 4\,k\,\pi$$

Flusso attraverso la superficie ellissoidale: $\mathbb{E} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$:
consideriamo la regione $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ compresa tra la superficie sferica $\mathbb{S}$ e la superficie $\mathbb{E}$

In $\mathbb{B}$ (che non include l'origine) il campo $\overrightarrow{F}$ è regolarissimo: dal teorema della divergenza segue quindi

$$\iiint_{\mathbb{B}} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\mathbb{B}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

ovvero,

- tenuto conto che $\partial\mathbb{B} = \partial\mathbb{E} \cup \partial\mathbb{S}$ orientate in verso opposto
- e che

$$div(F) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{B}$$

$$\iint_{\mathbb{E}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma \; - \; \iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 0$$

Ne segue che

$$\iint_{\mathbb{E}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma \; = \; \iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = 4\, k\, \pi$$

Flusso uscente dal parallelepipedo:

Nel parallelepipedo (che non include l'origine) il campo $\overrightarrow{F}$ è regolarissimo: dal teorema della divergenza segue quindi

$$\iint_{\partial\mathbb{P}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iiint_{\mathbb{P}} div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz = 0$$

Esercizio 6 Assegnata la curva

$$\mathbb{C} : \begin{cases} x = \cos(t), \\ y = 2\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 3\cos(t), \end{cases}$$

- determinare il lavoro del campo $\overrightarrow{F} = \{x + y,\, 2x + z,\, z + y\}$ lungo $\mathbb{C}$ nel verso quello offerto dalla rappresentazione parametrica al crescere di $t \in [0, 2\pi]$,
- riconoscere che $\mathbb{C}$ è bordo della superficie cartesiana

$$\mathbb{S} : z = 3\, x, \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,$$

- calcolare tale lavoro avvalendosi della Formula di Stokes,
- riconoscere il legame tra il lavoro ottenuto e l'area di $\mathbb{S}$

Risposta

Assumiamo il verso quello offerto dalla rappresentazione parametrica al crescere di $t \in [0, 2\pi]$:

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{4 + 6\sin^2(t)}} \; \{-\sin(t),\, 2\cos(t),\, -3\sin(t)\}$$

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^{2\pi} \{\cos(t) + 2\sin(t),\, 2\cos(t) + 3\cos(t),\, 3\cos(t) + 2\sin(t)\} \times$$

$$\{-\sin(t),\, 2\cos(t),\, -3\sin(t)\}\, dt \quad =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-10\sin(t)\cos(t) - 8\sin^2(t) + 10\cos^2(t)\right) dt = 2\pi$$

La rappresentazione parametrica di $\mathbb{C}$ mostra chiaramente che

$$z = 3x$$

e quindi che $\mathbb{C}$ è una curva piana appartenente a tale piano.

Sempre dalla rappresentazione parametrica si riconosce che

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

e quindi che la curva assegnata è il bordo della superficie ottenuta tagliando la colonna ellittica

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

col piano $z = 3x$.

Usando il Teorema di Stokes

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau} ds = \iint_S \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) \times \overrightarrow{\nu} \mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x + y & 2x + z & z + y \end{vmatrix} = \{0,\, 0,\, 1\}$$

$$\overrightarrow{\nu} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \{3,\, 0,\, 1\}$$

L'analogia con il caso piano suggerisce la scelta del segno + : il versore normale (un ipotetico osservatore posto in piedi come ν) vede girare lungo il bordo nel verso antiorario.

Pertanto

$$\int_{\mathbb{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau} ds = \frac{1}{\sqrt{10}} \iint_{\mathbb{S}} d\sigma$$

L'ultimo integrale superficiale si calcola, tenuto conto che $\mathbb{S}$ è la superficie cartesiana

$$z = 3x, \;\; x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \quad \to \quad d\sigma = \sqrt{1 + 3^2}\; dx\, dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\iint_{\mathbb{S}} d\sigma = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1} dxdy = 2\pi$$

avendo semplicemente usato la formula $\pi\, a\, b$ dell'area di un'ellisse di semiassi a e b.

L'area della superficie $\mathbb{S}$ è

$$area(\mathbb{S}) = \iint_{x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1} \sqrt{10}\, dx\, dy = 2\sqrt{10}\ \pi$$

Tenuto presente che

- sia il rot$(\overrightarrow{F})$ che $\overrightarrow{\nu}$ sono costanti su $\mathbb{S}$
- e il loro prodotto scalare vale $1/\sqrt{10}$

è naturale che il lavoro richiesto, tradotto con la formula di Stokes, valga

$$2\pi\ =\ \frac{1}{\sqrt{10}}\ area(\mathbb{S})$$

Esercizio 7 Assegnata la superficie cartesiana

$$z = 1 + 3x + 2y, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

- calcolare i suoi termini L^2, M^2, N^2,
- calcolare l'area e confrontarla con quella del quadrato $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ su cui la superficie è assegnata.

Risposta

Si tratta di un parallelogramma del piano $z = 1 + 3x + 2y$

La matrice da cui si ricavano le tre espressioni $L,\ M,\ N$, i tre minori del secondo ordine, è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da cui, calcolati come di consueto,

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad N = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Si noti che il vettore $\{L,\ M,\ N\}$ è normale alla superficie.

Riesce

$$L^2 + M^2 + N^2 = 9 + 4 + 1 = 14$$

e quindi i versori normali alla superficie sono

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}\,\{-3,\ -2,\ 1\}$$

L'area è, per definizione,

$$area(S) = \iint_{x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1} \sqrt{14}\ dx\, dy\ =\ \sqrt{14}$$

Si noti che

- l'area del quadrato Q del piano xy su cui la superficie si rappresenta è 1,
- il coseno della normale alla superficie con l'asse z vale $\nu_z = 1/\sqrt{14}$

è naturale che tra l'area del parallelogramma S e l'area del quadrato Q su cui si proietta valga la relazione

$$area(S)\,\nu_z \;=\; area(Q)$$

Esercizio 8 Assegnata la superficie

$$\mathbb{S}:\; x = u^2 + v^2,\, y = u^2 - v^2,\, z = 2uv,\;\; u^2 + v^2 \le 1$$

- calcolare la matrice jacobiana
$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$
- calcolare i tre valori L^2, M^2, N^2
- esprimere l'elemento d'area $d\,\sigma$
- calcolare l'area di $\mathbb{S}$.

Risposta

Elevando al quadrato le tre espressioni parametriche si riconosce che esse verificano la relazione

$$x^2 = y^2 + z^2$$

che è la nota equazione cartesiana di un cono rotondo. Si ha

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2u & 2v \\ 2v & -2v & 2u \end{pmatrix}$$

$$L = 4u^2 + 4v^2, \quad M = 4v^2 - 4u^2, \quad N = -8uv$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = 32(u^4 + v^4 + 2u^2v^2),$$

$$d\sigma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, du\, dv = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

$$area(\mathbb{S}) = \iint_{\mathbb{S}} d\sigma \;=\; \iint_{u^2+v^2\le 1} 4\sqrt{2}(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

da cui servendosi delle coordinate polari

$$area(\mathbb{S}) = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = 2\,\sqrt{2}\,\pi$$

Chiunque abbia un po' di memoria ricorderá la formula elementare dell'area della superficie laterale del cono rotondo di raggio r, altezza h e apotema $a = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$area = \frac{1}{2} 2\pi\, r\, a = \pi\, r\, a$$

che nel nostro caso darebbe

$$area = \pi\,\sqrt{2},$$

la metà del valore $\boxed{2\sqrt{2}\,\pi}$ trovato sopra.

La rappresentazione parametrica fornita produce in realtá il cono contato due volte. Pensate ad esempio al punto $P = (1, 1, 0)$ prodotto sia dal punto $(u, v) = (1, 0)$ che dal punto $(u, v) = (-1, 0)$, ecc. Non è quindi sorprendente che l'area venga raddoppiata.

Esercizio 9 Assegnato nel piano $x\,z$ il grafico

$$x = 1 + z^2, \ -1 \leq z \leq 1$$

consideriamo la superficie $\mathbb{S}$ ottenuta facendo ruotare tale grafico intorno all'asse z

- determinare le equazioni parametriche di $\mathbb{S}$,
- determinare l'area di $\mathbb{S}$.

Risposta

Le equazioni parametriche della superficie di rotazione sono

$$\begin{cases} x = (1+z^2)\cos(\theta) \\ y = (1+z^2)\sin(\theta) \qquad\qquad \theta \in [0, 2\pi], \ -1 \leq z \leq 1 \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_z & y_z & z_z \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z\cos(\theta) & 2z\sin(\theta) & 1 \\ -(1+z^2)\sin(\theta) & (1+z^2)\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}$$

$$d\sigma = (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}\ dz\,d\theta$$

$$Area(\mathbb{S}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} (1+z^2)\sqrt{1+4z^2}\,dz =$$

$$2\pi\,\frac{50\sqrt{5} + 15\,\mathrm{ArcSinh}(2)}{32} \simeq 26.2044$$

Esercizio 10 Calcolare la quota del baricentro

$$z_G = \frac{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z\ d\sigma}{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} d\sigma}$$

della calotta sferica

$$\mathbb{S}_{RH} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad H \leq z \leq R$$

Risposta

Rappresentazione parametrica della $\mathbb{S}_{RH}$:

$$\begin{cases} x = R\sin(\psi)\cos(\theta) \\ y = R\sin(\psi)\sin(\theta) \qquad \psi \in [0, \arccos(H/R)], \ \theta \in [0, 2\pi] \\ z = R\cos(\psi) \end{cases}$$

$$d\sigma = R^2 \ \sin(\psi)\, d\psi\, d\theta,$$

$$\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z\ d\,\sigma = 2\pi\, R^3 \int_0^{\arccos(H/R)} \cos(\psi)\ \sin(\psi) d\psi = \pi R^3 (1-(H/R)^2)$$

$$\iint_{\mathbb{S}_{RH}} d\,\sigma = 2\pi R^2 \int_0^{\arccos(H/R)} \sin(\psi)\, d\psi = 2\pi R^2 (1 - H/R)$$

Ne segue che:

$$z_G = \frac{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z\ d\,\sigma}{\iint_{\mathbb{S}_{RH}}\ d\,\sigma} = \frac{\pi R^3 (1-(H/R)^2)}{2\pi R^2 (1-H/R)} = \frac{1}{2}(R+H).$$