ANALISI VETTORIALE — ESERCIZI SU EQUADIFF

Esercizio 1 Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = y(y-1)t$$

e determinare quali soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Risposta Fuori dagli equilibri $y = 0$ e $y = 1$, separazione delle variabili:

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\, dy = \int t\, dt.$$

Il primo integrando è uguale a $(y-1)^{-1} - y^{-1}$, per cui dev'essere

$$\log \frac{|y-1|}{|y|} = \frac{t^2}{2} + C \iff \frac{|y-1|}{|y|} = e^C e^{t^2/2} \iff \frac{y-1}{y} = Ke^{t^2/2} \iff y = \frac{1}{1-Ke^{t^2/2}}$$

con C e K arbitrarie costanti reali. Prendendo $K > 1$ o $K < 0$ si ottengono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, a valori nel primo caso in $]-\infty, 0[$ e nel secondo in $]0,1[$; quando $0 < K < 1$ si ottengono soluzioni > 1 definite negli intervalli in cui $e^{t^2/2} < 1/K$, cioè per $|t| < \sqrt{-\log K^2}$, oppure soluzioni < 0 definite negli intervalli in cui $e^{t^2/2} > 1/K$, cioè per $t < -\sqrt{-\log K^2}$ e per $t > \sqrt{-\log K^2}$.

Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = t \tan y, \quad y(0) = \pi/4.$$

determinando l'intervallo di definizione della soluzione.

Risposta Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, col secondo membro definito per $y \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Poiché $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \neq 0$, in un intorno del punto $(0, \frac{\pi}{4})$ possiamo dividere per $\tan(y)$ e procedere nella maniera standard

$$\int \frac{1}{\tan(y)}\, dy = \int t\, dt \qquad \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}\, dy = \frac{t^2}{2} + c,$$

dove c è una costante che calcoleremo imponendo la condizione iniziale. Abbiamo quindi che la funzione $y(t)$ soddisfa

$$\log|\sin(y(t))| = \frac{t^2}{2} + c$$

e poiché $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ *si può togliere il seno dal segno di modulo* e si ha $\sin(y(t)) = e^c e^{\frac{t^2}{2}}$ (mentre in generale bisognerebbe scrivere $\sin(y(t)) = Ke^{\frac{t^2}{2}}$ con $K = \pm e^c$): molto, molto grave sarebbe passare a $\sin(y(t)) = e^{\frac{t^2}{2}} + K$... Dunque e^c è uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(t) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{t^2}{2}}\right),$$

definita per tutte le t tali che

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{t^2}{2}} < 1 \iff e^{\frac{t^2}{2}} < \sqrt{2} \iff \frac{t^2}{2} < \log(\sqrt{2}) \iff |t| < \sqrt{\log(2)}.$$

È sbagliato scrivere $\leq$ al posto di $<$: per t che tende a $\sqrt{\log(2)}$ la soluzione tende a $\frac{\pi}{2}$, punto in cui l'equazione differenziale non ha più senso essendo il secondo membro non definito; discorso analogo per t che tende a $-\sqrt{\log(2)}$.

L'insieme di definizione sarà dunque $I = (-\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)})$.

Esercizio 3 Trovare le soluzioni non identicamente nulle dell'equazione differenziale

$$y' = e^t \cos^2(y)$$

determinando i loro intervalli di definizione.

Risposta Al variare di y in un intervallo non contenente nessun punto

$$\frac{\pi}{2} + k\pi$$

il secondo membro dell'equazione non si annulla, e separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos^2(y) \Longrightarrow \frac{dy}{\cos^2(y)} = e^t\, dt \Longrightarrow \int \frac{dy}{\cos^2(y)} = \int e^t\, dt$$

da cui

$$\tan(y) = e^t + c \Longrightarrow y(t) = \arctan(e^t + c) + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Le soluzioni trovate sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{(1+t^2)(1-y^2)}{ty}.$$

Risposta. Dividendo per $t(1-y^2) \neq 0$ e separando le variabili si trova l'integrale generale definito implicitamente da

$$t^2 + \log t^2 + \log|1-y^2| = K$$

ovvero

$$y^2 = 1 + \frac{C}{t^2 e^{t^2}}.$$

In questa espressione si ritrovano anche le due soluzioni costanti $y = \pm 1$ che in partenza non erano state prese in considerazione.

Esercizio 5 Controllare se la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^4(6t + e^t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ oppure no.

Risposta Separazione delle variabili:

$$\int \frac{dy}{3y^4} = \int (6t + e^t)\, dt \Longleftrightarrow -\frac{1}{9y^3} = 3t^2 + e^t + c$$

e, imponendo la condizione di Cauchy che dà $c = -10/9$,

$$y = \left(\frac{1}{-27t^2 - 9e^t + 10} \right)^{1/3}.$$

La soluzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$: infatti $-27t^2 - 9e^t + 10$ ha senz'altro degli zeri, dal momento che assume, oltre a valori positivi come 10 per $t = 0$, anche valori negativi come $-17 - e$ per $t = 1$ (e anzi tende a $-\infty$ per $t \to \infty$).

Esercizio 6 Dato un arbitario $y_0 \in \mathbb{R}$, dimostrare che il problema di Cauchy

$$y' = x|y|, \quad y(0) = y_0$$

ammette un'unica soluzione, e calcolarla.

Risposta Siccome il secondo membro è uniformemente lipschitziano in ogni striscia $[A, B] \times \mathbb{R}$, vale il teorema di esistenza in grande e unicità. In particolare, una soluzione non identicamente nulla non si annulla mai, ovvero si mantiene sempre strettamente positiva o strettamente negativa. Per $y_0 = 0$ si ha la soluzione $y(x) = 0$. Altrimenti si studiano le soluzioni di

$$y' = xy, \quad y(0) = y_0$$

per gli $y_0 > 0$ e quelle di

$$y' = -xy, \quad y(0) = y_0$$

per gli $y_0 < 0$. Nel primo caso troviamo $y = y_0 e^{x^2/2}$ e nel secondo $y = y_0 e^{-x^2/2}$.

Esercizio 7 Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{xt\cos t - x}{t} \\ x(\pi) = 2 \end{cases}$$

Soluzione: Risolviamo con la separazione delle variabili in un intorno di $(\pi, 2)$:

$$\dot{x} = \frac{x(t\cos t - 1)}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{x}}{x} = \cos t - \frac{1}{t}.$$

Integrando membro a membro otteniamo

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_\pi^t \mathrm{d}s \left(\cos s - \frac{1}{s} \right)$$

da cui

$$\ln x - \ln 2 = \sin t - \ln t + \ln \pi.$$

Ne segue che

$$\ln x = \sin t + \ln\left(\frac{2\pi}{t}\right)$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{2\pi}{t} e^{\sin t}.$$

Esercizio 8 Trovare la soluzione dell'equazione

$$y'' \cos t + 2y' \sin t = 2\sqrt{y'}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

che verifica $y(0) = y'(0) = 1$.

Risposta. L'equazione è di Bernoulli nella nuova incognita $w = y'$:

$$w' \cos t + 2w \sin t = 2\sqrt{w}.$$

Ponendo $z = \sqrt{w}$ si arriva all'equazione lineare non omogenea

$$z' \cos t + z \sin t = 1,$$

il cui integrale generale è $z(t) = C \cos t + \sin t$. Da qui si ricava

$$y'(t) = w(t) = (C \cos t + \sin t)^2;$$

imponendo che $y'(0) = w(0) = 1$, e quindi anche $z(0) = 1$ (dal momento che $z(t)$ è la determinazione *positiva* della radice di $w(t)$) si ottiene $C = 1$. Dunque $y(t)$ è la primitiva di $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t$ che vale 1 per $t = 0$, ovvero

$$y(t) = t + \sin^2 t + 1.$$

Esercizio 9 Risolvere l'equazione

$$\frac{y}{t}\, dt + (y - \log t)\, dy = 0.$$

Risposta. Nella scrittura del primo membro è innanzitutto implicita la condizione $t > 0$. L'equazione non è esatta, ma lo diventa quando viene moltiplicata per il fattore integrante $\mu(y) = y^{-2}$, $y \neq 0$; le *primitive* del (nuovo) primo membro

$$\frac{1}{yt}\, dt + \left(\frac{1}{y} - \frac{\log t}{y^2}\right) dy$$

sono le funzioni

$$\log |y| + \frac{\log t}{y} + C,$$

che *non sono*, come invece molti hanno scritto, le soluzioni dell'equazione: queste ultime si ottengono compiendo il successivo passo, semplice quanto si vuole, ma comunque necessario, di definirle implicitamente attraverso la famiglia di *equazioni cartesiane*

$$\log|y| + \frac{\log t}{y} + C = 0.$$

Esercizio 10 Calcolare la soluzione $(y(t), w(t))$ del sistema

$$y' = w^2 \sin y, \quad w' = w^3$$

tale che $(y(1), w(1)) = (\pi/2, 1)$.

Risposta. Il sistema è triangolare. Il problema di Cauchy

$$w' = w^3, \quad w(1) = 1$$

ammette l'unica soluzione $w(t) = (3 - 2t)^{-1/2}$ (e da adesso in poi si impone $t < 3/2$). A questo punto si cercano le soluzioni di

$$y' = \frac{\sin y}{3 - 2t}$$

ovvero

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dt}{3 - 2t}.$$

Siccome il primo integrale vale

$$\int \frac{dy}{2\sin^2(y/2)\cos^2(y/2)} = \log|\tan(y/2)| + C$$

otteniamo facilmente

$$\tan(y/2) = \frac{K}{(3 - 2t)^{1/2}} = Kw$$

da cui, imponendo la condizione $y(1) = \pi/2$, si ottiene $K = 1$ e quindi

$$y = 2\arctan(3 - 2t)^{1/2}, \quad w = (3 - 2t)^{1/2}.$$