

ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 02/7/2014

Esercizio 1 Sia

$$f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Studiare la derivabilità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali in $(0, 0)$.

Esercizio 2 Si dimostri che l'equazione

$$F(x, y) = xy^4 + 2y + y \sin x + 2(e^x - x - 1) = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0, 0)$ una funzione regolare $y = f(x)$; calcolare $f'(0)$, $f''(0)$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza semplice, assoluta e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log x)^{3n}}{\sqrt{n+1}}, \quad x > 0.$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale superficiale

$$I = \int_{\Sigma} z^2 d\sigma$$

dove Σ è il quarto di superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Esercizio 5 Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\varphi} (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy$$

dove φ è la frontiera, orientata in senso antiorario, del quarto di cerchio Q definito da $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(t) = \cos^2 y \sinh t, \quad y(0) = 0.$$