ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 02/7/2014

Esercizio 1 Sia

$$f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Studiare la derivabilità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali in $(0,0)$.

Risposta La funzione è evidentemente continua su $(0,0)$ dato che

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3 + |xy|^2}{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \to 0 \qquad per \qquad (x,y) \to (0,0).$$

Si ha $f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = 0$. Non è differenziabile in $(0,0)$ infatti le derivate direzionali sono

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = v_1^3 - v_1 v_2^2 \neq v_1 = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2.$$

Esercizio 2 Si dimostri che l'equazione

$$F(x,y) = xy^4 + 2y + y\sin x + 2(e^x - x - 1) = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,0)$ una funzione regolare $y = f(x)$; calcolare $f'(0), f''(0)$.

Risposta La funzione F è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$, inoltre $F(0,0) = 0$ e, dato che $F_y(x,y) = 4xy^3 + 2 + \sin x$, si ha $F(0,0) = 2 \neq 0$. Quindi per il teorema del Dini esiste un' unica funzione $f(x)$ che esplicita l'equazione $F(x,y) = 0$ in un intorno dell'origine e tale che $f(0) = 0$. Dalle formule delle derivate prime si ottiene

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{y^4 + y\cos x + 2(e^x - 1)}{4xy^3 + 2 + \sin x}\Big|_{(0,0)} = 0;$$

Dato che $F_{xx} = -y\sin x + 2e^x$, $F_{xy} = 4y^3 + \cos x$, $F_{yy} = 12xy^2$ si trova

$$f''(0) = -\frac{F_{xx}(0,0) + 2F_{xy}(0,0)f'(0) + F_{yy}(0,0)f'^2(0)}{F_y(0,0)} = -1.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza semplice, assoluta e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log x)^{3n}}{\sqrt{n}+1}, \qquad x > 0$$

Risposta Con il cambio di variabile $y = (\log x)^3$ ci riconduciamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0} \frac{y^n}{\sqrt{n}+1}$$

che ha raggio di convergenza 1, converge in $y=-1$ per il principio di Leibnitz, ma non converge in $y=1$. Quindi la serie nella variablile y converge totalmente in tutti gli intervalli chiusi e limitati (compatti) contenuti in $(-1,1)$. Applicando il cambio di variabili si ha la convergenza totale in tutti i compatti contenuti in $(1/e, e)$ la convergenza semplice in $[1/e, e)$ e la convergenza assoluta in $(1/e, e)$.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale superficiale

$$I=\int_\Sigma z^2\, d\sigma$$

dove Σ è il quarto di superficie sferica

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$$

Risposta Passando in coordinate sferiche:

$$x=R\sin\varphi\,\cos\,\theta,\ y=R\sin\varphi\,\sin\,\theta,\ z=R\cos\varphi, \qquad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\theta\leq\pi$$

ci riconduciamo al calcolo dell'integrale

$$I=\int_0^\pi d\theta\int_0^{\pi/2} R^2\cos^2\varphi R^2\sin\varphi\, d\varphi=\pi R^4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^4}{3}.$$

Esercizio 5 Calcolare l'integrale curvilineo

$$I=\int_\varphi (x-y^3)\,dx+(y^3+x^3)\,dy$$

dove φ è la frontiera, orientata in senso antiorario, del quarto di cerchio Q definito da $x^2+y^2\leq R^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Risposta Si applica Gauss–Green, ovvero Stokes bidimensionale (Q è ammissibile):

$$I=\iint_Q\left[(y^3+x^3)_x-(x-y^3)_y\right]\,dxdy=3\int_Q (x^2+y^2)\,dxdy=\frac{3}{8}\pi R^4.$$

OSS. Posto $F=(x-y^3, x^3+y^3)$, lo posso vedere come

$$\int_\varphi F\cdot\tau ds=\iint_Q (F_{2/x}-F_{1/y})dxdy.$$

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(t)=\cos^2 y\,\sinh t, \qquad y(0)=0.$$

Risposta È un'equazione a variabili separabili. Le soluzioni di equilibrio dell'equazione differenziale sono $y(t)=\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, che non soddisfano la condizione iniziale. Quindi la soluzione appartiene all'intervallo $(-\pi/2,\pi/2)$. Separando le variabili, integrando e imponendo la condizione iniziale si trova

$$\tan y=\cosh t-1$$

che definisce implicitamente la soluzione. Quindi $y(t)=\arctan(\cosh t-1)$.