

COMPITO SCRITTO DI ANALISI VETTORIALE 16-09-2014

Esercizio 1 Sia

$$f(x, y) = x^{4/5}y^{1/5}.$$

- (i) Studiare derivabilità e differenziabilità in $(0, 0)$.
- (ii) Calcolare le derivate direzionali in $(0, 0)$.

Esercizio 2 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(x^\alpha)}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

Esercizio 3 Trovare il punto o i punti della curva $x^2y - 16 = 0$, $x > 0$, a minima distanza dall'origine.

Esercizio 4 (i) Si determini il dominio di definizione del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\log(x + y) + \frac{x}{x + y}, \frac{x}{x + y} \right)$$

e si dica se in tale dominio il campo vettoriale è irrotazionale. In caso affermativo studiare se è conservativo.

(ii) Calcolare il lavoro sull'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ contenuto nel primo quadrante ed orientato nel verso antiorario.

Esercizio 5 Calcolare

$$\iint_D x \log y \, dx dy$$

dove D è la regione piana definita da $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Esercizio 6 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \frac{y \log |y|}{t+1} \\ y(0) &= 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y' &= \frac{y \log |y|}{t+1}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$