COMPITO SCRITTO DI ANALISI VETTORIALE 16-09-2014

Esercizio 1 Sia
$$f(x,y) = x^{4/5}y^{1/5}.$$

(i) Studiare derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.
(ii) Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$.

Risposta (i) La funzione è derivabile in $(0,0)$, infatti si ha $f(x,0) = f(0,y) = 0$ da cui $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. D'altro canto le derivate parziali non sono continue infatti $f_x(x,y) = 4/5x^{-1/5}y^{1/5}$ e $f_y(x,y) = 1/5x^{4/5}y^{-4/5}$, questo non basta per dedurre che la funzione non è differenziabile dato che (per il teorema del differenziale totale) la continuità delle derivate è solo una condizione sufficiente per la differenziabilità.

Verifichiamo che la funzione non è differenziabile dalla definizione di differenziabilità. Si nota infatti che
$$R(h,k) = \frac{h^{4/5}k^{1/5}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
non ha limite per $(h,k) \to (0,0)$ (basta calcolare i limiti lungo le rette oppure passando in coordinate polari).

(ii) Dato un versore (v_1, v_2) calcoliamo
$$\partial_{(v_1,v_2)} := \lim_{t\to 0} \frac{f(v_1 t, v_2 t)}{t} = v_1^{4/5} v_2^{1/5}.$$

Esercizio 2 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^2(1+x^2)} dx.$$

Risposta Per $x \to 0$:
$$\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^2(1+x^2)} \approx \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2-2\alpha}}$$
Si ha sommabilità in $(0,1)$ se $\alpha > 1/2$.

Per $x \to \infty$:
$$\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^2(1+x^2)} \approx \frac{1}{x^4}$$
Si ha sommabilità in $(1,\infty)$ per ogni α.

Esercizio 3 Trovare il punto o i punti della curva $x^2y - 16 = 0$, $x > 0$, a minima distanza dall'origine.

Risposta Con un semplice argomento geometrico si vede che di punti ce n'è solo uno: quello in cui la curva è tangente ad un'unica opportuna circonferenza di centro l'origine il cui raggio r da determinare è la distanza richiesta. Dobbiamo minimizzare $r = \sqrt{x^2+y^2}$, o più convenientemente $f(x,y) = r^2 = x^2 + y^2$, sotto il vincolo $g(x,y) = x^2y - 16 = 0$, e possiamo utilizzare i moltiplicatori di Lagrange:
$$f_x + \lambda g_x = 2x + 2\lambda xy = 2x(1+\lambda y) = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 2y + \lambda x^2 = 0, \quad g(x,y) = x^2y - 16 = 0.$$

Dalla prima equazione ricaviamo o $x = 0$, che non è ammissibile, o $\lambda y = -1$, per cui dalla seconda equazione otteniamo $2y^2 - x^2 = 0$; quindi, sostituendo nella terza, $2y^3 = 16$, ovvero $y = 2$ e infine $x = \pm 2\sqrt{2}$ dove dobbiamo scartare il segno meno.

Allo stesso risultato si arriva anche minimizzando la funzione $x \mapsto f(x, 16/x^2) = x^2 + 256/x^4$.

Esercizio 4 (i) Si determini il dominio di definizione del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = (\log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y})$$

e si dica se in tale dominio il campo vettoriale è irrotazionale. In caso affermativo studiare se è conservativo.

(ii) Calcolare il lavoro sull'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ contenuto nel primo quadrante ed orientato nel verso antiorario.

Risposta Il dominio di definizione è il semipiano aperto $x + y > 0$. Si verifica in modo diretto che il campo vettoriale è irrotazionale dato che

$$\partial_y(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}) = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} = \partial_x \frac{x}{x+y}.$$

Dato che il dominio di definizione è semplicemente connesso questo implica che il campo vettoriale è conservativo. Si vede direttamente che $V(x,y) = x\log(x+y)$. Infatti integrando la componente y in dy si ottiene $V(x,y) = x\log(x+y) + g(x)$ e poi derivando rispetto ad x si ottiene $g(x) = C$.

(ii) L'integrale richiesto è appunto

$$V(\sqrt{2}, 0) - V(0, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\log(2).$$

Esercizio 5 Calcolare

$$\iint_D x \log y \, dxdy$$

dove D è la regione piana definita da $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Risposta In questo dominio conviene introdurre il sistema di coordinate polari $\Phi : x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ per cui $D = \Phi([0, \frac{\pi}{4}] \times [0, R])$. Quindi

$$\iint_D x \log y \, dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_0^R \rho^2 \cos\theta \log(\rho\sin\theta) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^R \rho^2 \log(\rho) d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\theta d\theta + \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\theta \log(\sin\theta) d\theta.$$

Si ha

$$\int_0^R \rho^2 \log(\rho) d\rho = \frac{1}{9} R^3 (3\log(R) - 1); \qquad \int_0^{\pi/4} \cos\theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3}; \qquad \int_0^{\pi/4} \cos\theta \log(\sin\theta) d\theta = -\frac{2 + \log(2)}{2\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\iint_D x \log y \, dxdy = \frac{R^3(3\log(R) - 1)}{9\sqrt{2}} - \frac{R^3(2 + \log(2))}{6\sqrt{2}} = -\frac{R^3(-6\log(R) + 8 + \log(8))}{18\sqrt{2}}.$$

Esercizio 6 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \frac{y \ \log\ |y|}{t+1} \\ y(0) &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= \frac{y \ \log\ |y|}{t+1}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Risposta La funzione $g(y) = y \log(|y|)$ è Lipschitz in $(0, 3)$ quindi per entrambe i problemi di Cauchy sono rispettate le ipotesi di esistenza e unicità locali. Dato che $g(1) = 0$, col dato iniziale $y(0) = 1$ si ha che l'unica soluzione è $y(t) = 1$. Dato che $g(2) \neq 0$, col dato iniziale $y(0) = 2$ il sistema si integra per separazione di variabili. Si noti che si può ignorare il modulo all' interno del logaritmo. Si ha:

$$\int_2^y \frac{dy}{y \log y} = \int_0^t \frac{dt}{1+t}$$

si ottiene

$$\log(\frac{\log(y)}{\log(2)}) = \log(1+t)$$

da cui $y = 2^{1+t}$.