ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 14/5/2014

Esercizio 1 Determinare, al variare di $\alpha \in]0,1]$, in quali punti dell'asse x è differenziabile la funzione $f(x,y) = x|y|^\alpha$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x,y) = a(x^2-1) + 3xy + y^3 :$$

1. si dimostri che, per ogni a, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(1,0)$;
2. si calcoli a in modo che $g(x)$ abbia in $x = 1$ un punto critico .

Esercizio 3 Si consideri la successione

$$f_n(x) = \frac{n}{x+n} :$$

1. si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione nell'intervallo $[0,a]$ con $a > 0$.
2. si studi la convergenza uniforme della successione nell'intervallo $[0,\infty)$.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}} - 5y, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} + 7x\right)$$

determinare l'insieme di definizione e calcolare la circuitazione del campo lungo la frontiera del dominio $D = \{(x,y) : 1 \le x^2 + (y-3)^2 \le 4\}$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 5 Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^3 - \sin x^3}{x^\alpha(x^3+2)} dx.$$

Esercizio 6 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1+y^2)\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e stabilire l'insieme massimale di esistenza della soluzione.