ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 14/5/2014

Esercizio 1 Determinare, al variare di $\alpha \in]0,1]$, in quali punti dell'asse x è differenziabile la funzione $f(x,y) = x|y|^\alpha$.

Risposta Per $x \neq 0$ la funzione non é derivabile rispetto alla y quindi a maggior ragione non è differenziabile. Per $x = y = 0$ applicando la definizione di differenziabilità si verifica che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

dato che

$$\frac{|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |h|.$$

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x,y) = a(x^2-1) + 3xy + y^3 :$$

1. si dimostri che, per ogni a, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(1,0)$;
2. si calcoli a in modo che $g(x)$ abbia in $x = 1$ un punto critico .

Risposta La funzione $f(x,y)$ è un polinomio e quindi di classe C^∞. Si verifica che $f(1,0) = 0$ e che $f_y(1,0) = 3$. Applicando il Teorema del Dini si deduce quindi che $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$. La derivata prima di $g(x)$ è data dalla formula:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$$

da cui si deduce che $g'(1) = 2a/3$ e quindi si ha un punto critico se e solo se $a = 0$.

Esercizio 3 Si consideri la successione

$$f_n(x) = \frac{n}{x+n} :$$

1. si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione nell'intervallo $[0,a]$ con $a > 0$.
2. si studi la convergenza uniforme della successione nell'insieme $[0,\infty)$.

Risposta La successione converge puntualmente a $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme si ha che

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - 1| = \max_{x\in[0,a]} \frac{x}{n+x} = \frac{a}{n+a}$$

e dato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+a} = 0$$

si ha la convergenza richiesta.

In $[0,\infty)$ al contrario si ha

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{n+x} = 1$$

quindi la successione non converge uniformemente.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y}} - 5y, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} + 7x)$$

determinare l'insieme di definizione e calcolare la circuitazione del campo lungo la frontiera del dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$ percorsa in senso antiorario.

Risposta Il campo è definito nell'insieme del piano semplicemente connesso $y > -x^2$. Si può applicare il teorema di Stokes :

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\tau ds = \iint_D (rot\mathbf{F})_3 dxdy$$

Tenendo presente che $(rot\mathbf{F})_3 = 12$ e che D è una corona circolare di centro $(0,3)$ e raggi 1 e 2 si ha che

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\tau ds = 12\, area\, D = 36\,\pi.$$

Esercizio 5 Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^3 - \sin x^3}{x^\alpha(x^3+2)} dx.$$

Risposta Si ha

$$\frac{x^3 - \sin x^3}{x^\alpha(x^3+2)} \approx \frac{1}{x^{\alpha-9}} \qquad x \to 0.$$

L'integrale è quindi convergente per $\alpha - 9 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 10$.

Esercizio 6 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1+y^2)\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e stabilire l'insieme massimale di esistenza della soluzione.

Risposta Per separazione di variabili si ottiene

$$\arctan y = \frac{1}{2}\sin t + c\,, \quad y = \tan(\frac{1}{2}\sin t + c)$$

dato che $y(0) = 1$ ottengo $c = \pi/4$ dato che $-\pi/4 < \frac{1}{2}\sin t < \pi/4$ per ogni t la soluzione è definita per ogni valore di t.