

ANALISI VETTORIALE - II COMPITO DI ESONERO

Esercizio 1 Sia $f(x)$ la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Calcolare

$$I = \int_0^{\pi} f(x) dx$$

giustificando i passaggi.

Esercizio 2 Esprimere in coordinate sferiche il dominio

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

e calcolare

$$I = \iiint_D z dx dy dz.$$

Esercizio 3 Sia Σ la superficie di equazioni parametriche

$$x(u, v) = -u - v, y(u, v) = u - v^2, z(u, v) = u - v, (u, v) \in [-1, 0] \times [0, 1].$$

Calcolare $\iint_{\Sigma} (x + z) d\sigma$.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (5x^2 + y^2 + 2xy, x^2 + 2xy + 3y^2)$,

- calcolare il flusso uscente dal dominio $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$;
- calcolare la circuitazione lungo la frontiera di D orientata in verso antiorario;
- dimostrare che \mathbf{F} è un campo vettoriale conservativo in tutto \mathbb{R}^2 e determinare un potenziale.

Esercizio 5 Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

dove D è il disco di centro l'origine e raggio uno.

Esercizio 6 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2te^y}{1 - t^2e^y}$$

nell'aperto A in cui è definita.