ANALISI VETTORIALE - II COMPITO DI ESONERO

Esercizio 1 Sia $f(x)$ la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Calcolare

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

giustificando i passaggi.

Risposta La serie converge totalmente, e quindi uniformemente, in tutto $\mathbb{R}$ dato che

$$|\frac{\sin(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$, e quindi in $[0,\pi]$, si può passare al limite sotto l'integrale, ottenendo

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

Esercizio 2 Esprimere in coordinate sferiche il dominio

$$D = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq z^2\}$$

e calcolare

$$I = \iiint_D z\, dxdydz.$$

Risposta Si introduca un sistema di coordinate sferiche

$$x = r\sin\varphi\,\cos\,\theta,\ y = r\sin\varphi\,\sin\,\theta,\ z = r\cos\varphi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Dev'essere $r^2\sin^2\varphi \leq r^2\cos^2\varphi$, da cui $\varphi \leq \pi/4$, e quindi D si trasforma nell'insieme

$$\{(r,\theta,\varphi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Si ottiene

$$I = 2\pi \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Esercizio 3 Sia Σ la superficie di equazioni parametriche

$$x(u,v) = -u-v,\ y(u,v) = u-v^2,\ z(u,v) = u-v,\ (u,v) \in [-1,0]\times[0,1].$$

Calcolare $\displaystyle\iint_{\Sigma} (x+z)d\sigma$.

Risposta Le funzioni $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2v & -1 \end{pmatrix}$$

ha sempre rango 2. Posto $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, si ha

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (2v-1, -2, 2v+1); \ |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{6+8v^2}.$$

Quindi

$$\iint_\Sigma (x+z)d\sigma = -2\int_{-1}^0 du \int_0^1 v\sqrt{6+8v^2}dv = \frac{3\sqrt{3}-7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (5x^2+y^2+2xy, x^2+2xy+3y^2)$,

- calcolare il flusso uscente dal dominio $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$;
- calcolare la circuitazione lungo la frontiera di D orientata in verso antiorario;
- dimostrare che $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale conservativo in tutto $\mathbb{R}^2$ e determinare un potenziale.

Risposta

Flusso uscente: Si ha $\mathbf{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e D è un dominio regolare normale. Possiamo applicare il teorema della divergenza al dominio D . Dall'essere $div\mathbf{F} = 4(3x+2y)$, si ha

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\nu\, ds = \iint_D div\mathbf{F}dxdy = 4\iint_D (3x+2y)dxdy = 4\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(3x+2y)dy = 4\int_0^1(3x^3+x^4)dx = \frac{19}{5}.$$

Circuitazione: Si verifica che $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ quindi il campo è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$. Servendosi del teorema di Stokes (che possiamo applicare per quanto detto prima) si ha

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\tau ds = \iint_D (rot\mathbf{F})_3 dxdy = 0.$$

Potenziale: $\mathbf{F}$ è irrotazionale su tutto $\mathbb{R}^2$, semplicemente connesso, e quindi è conservativo. Costruendo un potenziale con la tecnica dell'integrazione indefinita si trova

$$U(x,y) = \frac{5}{3}x^3 + xy^2 + x^2y + y^3.$$

Esercizio 5 Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

dove D è il disco di centro l'origine e raggio uno.

Risposta Si ha

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{D_\epsilon} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

dove $D_\epsilon = \{(x,y) : \epsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$. Introducendo un sistema di coordinate polari

$$\iint_{D_\epsilon} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi \int_\epsilon^1 \frac{\ln \rho^2}{\rho} \rho d\rho = 4\pi \int_\epsilon^1 \ln \rho \, d\rho = 4\pi(-1-\epsilon(\ln \epsilon - 1)) \to -4\pi.$$

Esercizio 6 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2te^y}{1-t^2e^y}$$

nell'aperto A in cui è definita.

Risposta A è il piano privato del grafico di $y = -2\log t$. In A l'equazione si riscrive

$$2te^y \, dt + (t^2e^y - 1) \, dy = 0$$

e quindi è esatta dato che

$$\frac{\partial(2te^y)}{\partial y} = 2te^y = \frac{\partial(t^2e^y-1)}{\partial t}.$$

Localmente il suo integrale generale è dato dalle famiglie di curve

$$t^2e^y - y = c.$$

Se associamo una condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, con $(t_0, y_0) \in A$, la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{2te^y}{1-t^2e^y}, \quad y(t_0) = y_0$$

è definita in forma implicita dall'equazione

$$t_0^2e^{y_0} - y_0 = t^2e^y - y.$$

Applicando il teorema di Dini alla funzione $F(t,y) = t_0^2e^{y_0} - y_0 - t^2e^y + y$ nel punto (t_0, y_0) si dimostra che esiste ed è unica una funzione $y(t)$ soluzione locale.