ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 13/2/2014

Esercizio 1 Studiare in $(0,0)$ (i) continuità, (ii) derivabilità rispetto a x e y, (iii) differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x^3 - 3y^3)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2 Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

(i) determinare per quali valori di x la serie è convergente;
(ii) determinare per quali valori di x la serie è derivabile termine a termine.

Esercizio 3 (i) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{(3t+2)^2}$$

con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y(0) = 0$, determinando i rispettivi intervalli di definizione.
(ii) Stabilire se esiste una soluzione dell'equazione tale che

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4 Sia

$$F(x,y) = x^2 + y + e^{x+y} - 1.$$

(i) Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(1,-1)$ le soluzioni dell'equazione $F(x,y) = 0$ coincidono con i punti del grafico di una funzione $y = f(x)$.
(ii) Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine 2 con punto iniziale $x = 1$.

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}} - 5y, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} + 7x\right)$$

determinare l'insieme di definizione. Calcolare la circuitazione del campo lungo la frontiera del dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$ presa con l'orientazione positiva.

Esercizio 6 Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^{\alpha}(x+2)} dx$$