ANALISI VETTORIALE — ESAME SCRITTO DEL 13/2/2014

Esercizio 1 Studiare in $(0,0)$ (i) continuità, (ii) derivabilità rispetto a x e y, (iii) differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x^3 - 3y^3)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risposta *Continuità in* $(0,0)$*:* f è continua (anche) nell'origine perché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

come si vede tenendo conto che

$$\Big|\frac{\sin(2x^3-3y^3)}{x^2+y^2}\Big| \leq \Big|\frac{2x^3-3y^3}{x^2+y^2}\Big| \leq 2\frac{|x^3|}{x^2+y^2} + 3\frac{|y^3|}{x^2+y^2} \leq 2|x| + 3|y| \to 0.$$

In coordinate polari: la funzione

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\sin(\rho^3(2\cos^3\theta - 3\sin^3\theta)}{\rho^2}$$

verifica

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| \leq \frac{|\rho^3(2\cos^3\theta - 3\sin^3\theta)|}{\rho^2} = \rho|(2\cos^3\theta - 3\sin^3\theta)|$$

e quindi, quale che sia θ, tende a 0 per $\rho \to 0$, *ma questo non basta ad affermare che* $f(x,y) \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$. Però vale la maggiorazione

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| \leq 5\rho \to 0 \quad \textit{per} \quad \rho \to 0,$$

e adesso sì che si può concludere che $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

Derivabilità in $(0,0)$*:* La funzione è derivabile in $(0,0)$ dato che

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h^3)}{h^3} = 2;$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sin(-3k^3)}{k^3} = -3.$$

Differenziabilità in $(0,0)$*:* Bisogna studiare se esiste ed è nullo il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \Big(\frac{\sin(2h^3 - 3k^3)}{h^2+k^2} - 2h + 3k\Big)$$

Si verifica che il limite non esiste, per esempio provando lungo le direzioni $(h,0)$ o $(0,k)$ viene 0 ma lungo la direzione $2h^3 = 3k^3$ viene diverso da 0 (e in coordinate polari si vede ancora meglio). Quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Si può concludere che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$ anche calcolando le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 2v_1^3 - 3v_2^3 \neq \nabla f(0,0)\cdot v = 2v_1 - 3v_2.$$

Ma attenzione: se invece tale formula fosse soddisfatta non si potrebbe viceversa concludere che la funzione sia differenziabile!

Esercizio 2 Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

(i) determinare per quali valori di x la serie è convergente;
(ii) determinare per quali valori di x la serie è derivabile termine a termine.

Risposta (i) Si ha la convergenza totale in $[0,+\infty)$ dato che

$$\frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{per} \quad x \geq 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Invece per $x < 0$ non si ha convergenza: il termine generale è addirittura divergente!
(ii) La serie ottenuta derivando termine a termine è

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

La serie delle derivate converge totalmente e quindi uniformemente per $x \geq \alpha$ quale che sia $\alpha > 0$ dato che

$$\left| -\frac{e^{-nx}}{n} \right| \leq e^{-n\alpha} \quad \text{per } x \geq \alpha; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} < \infty.$$

Quindi la serie è derivabile termine a termine in tutti i punti $x > 0$.

Invece in $x = 0$ la serie delle derivate è divergente perché è l'opposta della serie armonica.

Tantissimi hanno pensato di ricondursi ad una serie di potenze in $y = e^{-x}$: si può fare, a patto di non impasticciarsi con gli estremi dell'intervallo di convergenza nel caso prima della serie e poi della serie delle derivate...

Esercizio 3 (i) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{(3t+2)^2}$$

con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y(0) = 0$, determinando i rispettivi intervalli di definizione.

(ii) Stabilire se esiste una soluzione dell'equazione tale che $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1/2$.

Risposta L'equazione ha senso per $t \neq -2/3$, e siccome l'istante iniziale 0 sta in $(-2/3, \infty)$, è in questa semiretta che devono trovarsi gli intervalli di esistenza che ci interessano. La soluzione banale $y(t) \equiv 0$ è l'unica, grazie al teorema di esistenza e unicità, a soddisfare il problema di Cauchy con dato iniziale nullo, e, ancora banalmente, è definita in tutta la semiretta $(-2/3, \infty)$. Se $y \neq 0$, per separazione di variabili la soluzione generale è:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3(3t+2)} + c \Longrightarrow y(t,c) = \frac{1}{\frac{1}{3(3t+2)} + c}.$$

Quindi se $y(0) = 1$ si ha che $c = 5/6$ e infine

$$y(t) = \frac{2(3t+2)}{(5t+4)}$$

soluzione del equazione differenziale nell'intervallo $(-2/3, \infty)$ (e non conta che il secondo membro abbia senso della semiretta più grande $(-5/4, \infty)$).

Per avere che $\lim_{t\to\infty} y(t,c) = 1/2$ bisogna scegliere $c = 2$.

Esercizio 4 Sia

$$F(x,y) = x^2 + y + e^{x+y} - 1.$$

(i) Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(1,-1)$ le soluzioni dell'equazione $F(x,y) = 0$ coincidono con i punti del grafico di una funzione $y = f(x)$.

(ii) Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine 2 con punto iniziale $x_0 = 1$.

Risposta Dato che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(1,-1) = 0$, $F_y(x,y) = 1 + e^{x+y}$ e quindi $F_y(1,-1) = 2 \neq 0$, si può applicare il teorema di Dini ottenendo una funzione $y = f(x)$ che è a sua volta C^∞ in un intorno di $x_0 = 1$.

Si ha che

$$F_x(x,y) = e^{x+y} + 2x, \quad F_x(1,-1) = 3; \qquad f'(1) = -\frac{F_x(1,-1)}{F_y(1,-1)} = -\frac{3}{2}.$$

Dall'essere

$$F_{xx}(x,y) = e^{x+y} + 2, F_{xy}(x,y) = e^{x+y}, F_{yy}(x,y) = e^{x+y};$$
$$F_{xx}(1,-1) = 3, F_{xy}(1,-1) = 1, F_{yy}(1,-1) = 1,$$
$$f''(1) := -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}f' + F_{yy}f'^2}{F_y}\Big|_{(1,-1)} = -\frac{9}{8}$$

da cui si deduce che

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -1 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{9}{16}(x-1)^2 = -\frac{1}{16}\left(9x^2 + 6x + 1\right).$$

(È stato frequente che si dimenticasse il valore $f(1)$, ma anche che il punto iniziale non è 0.)

Esercizio 5 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}} - 5y, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} + 7x\Big)$$

determinare l'insieme di definizione. Calcolare la circuitazione del campo lungo la frontiera del dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$ presa con l'orientazione positiva.

Risposta Il campo è definito nell'insieme del piano semplicemente connesso $A = \{(x, y) : y > -x^2\}$. Si ha $F_1, F_2 \in C^\infty(A)$ e l'insieme $D \subset A$. Si può applicare il teorema di Stokes :

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \tau ds = \iint_D (rot\mathbf{F})_3 dxdy.$$

Tenendo presente che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 7 - \frac{x}{2\left(x^2+y\right)^{3/2}}; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x}{2\left(x^2+y\right)^{3/2}} - 5,$$

si ha $(rot\mathbf{F})_3 = 12$. Dato che D è una corona circolare di centro $(0, 3)$ e raggi 1 e 2

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \tau ds = 12\, area\, D = 36\,\pi.$$

Esercizio 6 Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha (x+2)} dx$$

Risposta Studiamo separatamente i due integrali

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^\alpha (x+2)} dx; \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha (x+2)} dx.$$

Per l'integrale I_1, si osserva che

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6} x^3 \qquad per \qquad x \to 0.$$

Quindi

$$\frac{x - \sin x}{x^\alpha (x+2)} \approx \frac{x^3}{x^\alpha (x+2)} \approx \frac{1}{x^{\alpha - 3}} \qquad per \qquad x \to 0.$$

Si ha convergenza di I_1 se e solo se $\alpha - 3 < 1$ da cui segue $\alpha < 4$.

Per l'integrale I_2 si osserva che $\sin x$ è una funzione limitata e si ha

$$\frac{x - \sin x}{x^\alpha (x+2)} \approx \frac{x}{x^{1+\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Si ha convergenza di I_2 se e solo se $\alpha > 1$.

Concludendo l'integrale iniziale converge per $1 < \alpha < 4$.