

## ANALISI VETTORIALE - SCRITTO DEL 28-01-2014

**Esercizio 1** Sia

$$f(x, y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

- calcolare il  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ;

- prolungata  $f$  per continuità in  $(0, 0)$ , studiare la derivabilità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali in  $(0, 0)$ .

**Esercizio 2** Data la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(2k+1)}{3^k} x^{2k}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta e totale. Detta  $f(x)$  la somma, senza calcolarla, determinare

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

**Esercizio 3** (i) Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto  $(2^{1/3}, 2^{2/3})$  una funzione  $y = \varphi(x)$ .

(ii) Dimostrare che la funzione  $\varphi(x)$  del punto (i) è dotata di massimo locale nel punto  $x_0 = 2^{1/3}$ .

**Esercizio 4** Posto

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}, (y, z) \in D\}$$

con  $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z, y^2 + z^2 \leq 1\}$ , calcolare

$$\iiint_E x dx dy dz.$$

**Esercizio 5** Sia

$$F(x) = \int_{1-\cos x}^{1+\sin x} e^{xt^4} dt.$$

Calcolare  $F'(x)$ . Determinare il polinomio di Taylor del primo ordine della  $F(x)$  nel punto  $x = 0$ .

**Esercizio 6** Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{t}y + t\sqrt{y}.$$

nell'aperto  $A$  in cui è definita.