ANALISI VETTORIALE - SCRITTO DEL 28-01-2014

Esercizio 1 Sia
$$f(x,y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$
- calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
- prolungata f per continuità in $(0,0)$, studiare la derivabilità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali in $(0,0)$.

Risposta: Per $(x,y) \to (0,0)$ si ha $f(x,y) \to 0$, come si vede ad esempio attraverso la maggiorazione
$$\left| \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{2},$$
oppure in coordinate polari, scrivendo
$$f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \frac{r^3(\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta)}{r^2}$$
per cui innanzitutto si ha $f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \to 0$ per ogni ϑ quando $r \to 0$: ma — attenzione! — questo di per sé non *implica* che $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$[1]come invece si ottiene passando a maggiorare
$$|\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta| \leq 2 \Longrightarrow |f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)| \leq 2r$$
(e si ricordi sempre che le maggiorazioni vanno fatte prendendo i *moduli*!) Ponendo $f(0,0) = 0$ si ha dunque il prolungamento richiesto. Siccome $f(0,y) = f(x,0) = 0$, la funzione è derivabile in $(0,0)$ e sia ha $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$; dato che
$$\frac{|f(t,mt)|}{|t|\sqrt{1+m^2}} = \frac{|m-m^2|t}{|t|(1+m^2)^{3/2}}$$
o equivalentemente
$$\frac{f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)}{r^3} = \frac{r^3(\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta)}{r^3} = \cos^2\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta$$
con l'ultimo membro $\neq 0$ ad esempio quando $\cos\vartheta = -\sin\vartheta$, non esiste il limite per $t \to 0$ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$. Infine per le derivate direzionali si ha
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{v}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(v_1 t, v_2 t)}{t} = v_1^2 v_2 - v_1 v_2^2.$$
per ogni versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 2 Data la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(2\,k+1)}{3^k} x^{2k}$$

[1]Quante volte bisogna ripetere che in coordinate polari r, ϑ passare al $\lim_{r\to 0}$ per ogni ϑ equivale a tendere verso l'origine lungo le rette, e che questo non basta al calcolo del $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$, come già mostra l'esempio della funzione che vale y^2/x per $x \neq 0$ e 0 per $x = 0$?

studiare la convergenza semplice, assoluta e totale. Detta $f(x)$ la somma, senza calcolarla, determinare

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

Risposta Ponendo $t = 2x^2/3$ ci riconduciamo a una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2\,k+1)t^k$$

con raggio di convergenza $R = 1$. La serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per $t \in (-1, 1)$, totalmente in $[a, b] \subset (-1, 1)$. In $t = \pm 1$ la serie non converge perchè il termine generale è tutt'altro che infinitesimo...

Dunque la serie iniziale non converge per $x = \pm\sqrt{3/2}$, mentre converge assolutamente per $|x| < \sqrt{3/2}$ e totalmente, quindi uniformemente, in ogni $[a, b] \subset (-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2})$; in particolare, la convergenza uniforme nell'intervallo $[0, 1]$ consente di integrare per serie:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(2k+1)}{3^k} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(2k+1)}{3^k} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{1-2/3} = 3.$$

Esercizio 3 (i) Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ una funzione $y = \varphi(x)$.

(ii) Dimostrare che la funzione $\varphi(x)$ del punto (i) è dotata di massimo locale nel punto $x_0 = 2^{1/3}$.

Risposta Dato che $f(x, y)$ è una funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$ e $f_y(2^{1/3}, 2^{2/3}) = 3 \cdot 2^{1/3} \neq 0$ possiamo applicare il Teorema del Dini ottenendo una funzione $y = \varphi(x)$ che è a sua volta C^2 in un intorno del punto $x_0 = 2^{1/3}$. Si ha che

$$\varphi'(2^{1/3}) := -\frac{f_x(2^{1/3}, 2^{2/3})}{f_y(2^{1/3}, 2^{2/3})} = 2^{-1/3}(2^{2/3} - 2^{2/3}) = 0$$

e, dall'essere

$$f_{xx}(2^{1/3}, 2^{2/3}) = f_{yy}(2^{1/3}, 2^{2/3}) = 6 \cdot 2^{1/3},$$

$$\varphi''(2^{1/3}) := -\frac{f_{xx} + 2f_{xy}\varphi' + f_{yy}\varphi'^2}{f_y}\Big|_{(2^{1/3}, 2^{2/3})} = -2$$

da cui si deduce che φ ha un punto massimo locale in x_0.

Esercizio 4 Posto

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2},\ (y, z) \in D\}$$

con $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq z,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$, calcolare

$$\iiint_E x dx dy dz.$$

Risposta E è un domino normale rispetto al piano yz. Per le formule di riduzione per domini normali

$$\iiint_E x dx dy dz = \iint_D dy dz \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x dx = \frac{1}{2}\iint_D (1-y^2-z^2)\, dy dz.$$

Introducendo un sistema di coordinate polari nel piano yz

$$y = \rho\cos\theta,\ z = \rho\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

l'insieme D si trasforma nell'insieme

$$S = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Quindi

$$\iiint_E x dx dy dz = \frac{1}{2}\iint_D (1-y^2-z^2)\, dy dz = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\int_0^1 (1-\rho^2)\rho d\rho = \frac{\pi}{32}.$$

Esercizio 5 Sia

$$F(x) = \int_{1-\cos x}^{1+\sin x} \mathrm{e}^{x\,t^4}\, dt.$$

Calcolare $F'(x)$. Determinare il polinomio di Taylor del primo ordine della $F(x)$ nel punto $x = 0$.

Risposta $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ perchè la funzione integranda è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e gli estremi di integrazione sono funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$. Si ha $F(0) = \int_0^1 dt = 1$ e, applicando la regola di derivazione degli integrali dipendenti da parametri,

$$F'(x) = \int_{1-\cos x}^{1+\sin x} t^4 \mathrm{e}^{x\,t^4}\, dt - \sin x\, \mathrm{e}^{x\,(1-\cos x)^4} + \cos x\, \mathrm{e}^{x\,(1+\sin x)^4}.$$

Quindi $F'(0) = 1/5 + 1 = 6/5$, e il polinomio di Taylor richiesto è dato da $T_1(x) = 1 + 6x/5$.

Esercizio 6 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{t}y + t\sqrt{y}.$$

nell'aperto A in cui è definita.

Risposta A è unione degli aperti $A_1 = \{t > 0, y > 0\}$ e $A_2 = \{t < 0, y > 0\}$: chissà perché, quasi tutti ignorano questa parte semplicissima della risposta e si limitano allo studio per $t > 0$, senza peraltro neppure scriverlo esplicitamente. Sia in A_1 che in A_2 l'equazione, che è di Bernoulli, ammette l'integrale generale dato da $y = z^2$, dove $z = \sqrt{y}$ è soluzione di

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{\frac{4}{t}y + t\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{t} + \frac{t}{2} = \frac{2z}{t} + \frac{t}{2}.$$

L'equazione omogenea associata $w' = 2wt^{-1}$ ammette l'integrale generale $w(t) = ct^2$, per cui, ponendo $z(t) = h(t)w(t) = t^2h(t)$, dall'equazione $z' = \frac{2z(t)}{t} + \frac{t}{2}$ si deduce che

$$2th(t) + \frac{t}{2} = h'(t)w(t) + h(t)w'(t) = t^2h'(t) + 2th(t)\,,$$

da cui $h'(t) = \frac{1}{2t}$ e quindi $h(t) = \frac{1}{2}\log|t|$. Ne segue che la soluzione generale è

$$z(t) = t^2(K + \frac{1}{2}\log|t|)\,, \quad \text{ovvero} \quad y = t^4\left(\frac{1}{2}\log|t| + K\right)^2.$$