

Tutto il corso lezione per lezione

04/10/16: Enti primitivi e assiomi, definizioni e teoremi. Insiemi. Inclusione tra insiemi e sue proprietà. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, differenza. Prodotto cartesiano. Predicati, implicazione ed equivalenza tra predicati. L'insieme dei numeri naturali, assiomi di Peano. Principio di Induzione. Esercizi sul metodo di dimostrazione per induzione: somma dei primi n numeri naturali, somma dei primi n numeri dispari.

05/10/16: Equivalenza tra Principio di induzione, Principio di Induzione debole, Principio del Buon Ordinamento (dim.). Fattoriale e coefficienti binomia. Triangolo di Tartaglia. Formula del binomio di Newton (dim.)

07/10/16: I numeri interi relativi e razionali. Rappresentazione dei numeri razionali sulla retta. Irrazionalità della lunghezza della diagonale del quadrato unitario (dim.). Definizione assiomatica dei numeri reali, Assioma di completezza. Rappresentazione dei numeri reali come allineamenti decimali. Densità dei numeri razionali in \mathbf{R} .

11/10/16: Retta reale, intervalli e semirette. Insiemi limitati superiormente e/o inferiormente. Minoranti e maggioranti di un insieme. Massimo e minimo di un insieme. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (dim.). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 1: Es 1.1, 1.2(iii), 1.5, 1.7(disuguaglianza di Bernoulli), 1.9(i)e(ii), 1.11.

12/10/16: Caratterizzazione "operativa" di estremo superiore e inferiore. Monotonia di Inf e sup rispetto all'inclusione. Cenni sulla cardinalità degli insiemi numerici, insiemi numerabili e cardinalità del continuo. Funzioni: definizioni (dominio, codominio, immagine e grafico). Funzioni reali di variabile reale. Esempi: successioni, funzioni affini, funzione valore assoluto.

14/10/16: Restrizione di una funzione. Polinomi di secondo grado. Equazioni e dissertazioni di secondo grado. Operazioni tra funzioni, composizione. Funzioni limitate, funzioni monotone. Funzione parte intera. Composizione di funzioni monotone (dim.). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 1: Es. 1.7(progressione geometrica), Es. 1.8, Es. 1.9(iii).

18/10/16: Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni invettive, suriettive, invertibili. Funzione inversa e sue proprietà. Potenze e radici n -esime. Potenze ad esponente reale: definizione e proprietà.

Esponenziali e logaritmi: definizioni e proprietà. **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 1: Es 1.11, Es. 1.12. **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 2: Es. 2.2 (a,b,c,d), Es. 2.3 (primo e terzo esempio), Es. 2.4.

19/10/16: La retta reale estesa. Intorno di punti al finito e all'infinito. Punti di accumulazione di un insieme. Definizione unificata di limite e discussione dei vari casi particolari. Esempio di funzione che non ammette limite. Limite destro, limite sinistro e caratterizzazione dell'esistenza del limite. Unicità del limite (dim.). Teorema del confronto per limiti finiti (dim.). Limite di $f(x)$ e limite di $|f(x)|$ in un punto. Limite di $f(x)=\sin x$ in $x_0=0$.

21/10/16: Limite di $\cos x$ e di $(\sin x)/x$ in $x_0=0$. Teorema del confronto per limiti non finiti. Teorema della permanenza del segno (dim.). Segno di limiti di funzioni localmente non negative (non positive). Locale limitatezza delle funzioni che hanno limite finito (dim.). Operazioni sui limiti finiti (dim. assegnata per casa). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 2: Es. 2.5 (b) e (d), Es. 2.7.

25/10/16: Aritmetizzazione parziale degli infiniti, forme indeterminate. Limite di funzione limitata per infinitesimo (dim.). Cambiamento di variabili nei limiti (dim.). Limite di $(1-\cos x)/x^2$ in $x_0=0$. Limiti di funzioni razionali, sia al finito che all'infinito. Regola di Ruffini. **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 2: Es. 2.8, Es.2.9, Es. 2.10.

26/10/16: Teorema sui limiti di funzioni monotone (dim.). Successioni numeriche. Successioni convergenti, divergenti indeterminate. Primi esempi. Teorema ponte (caratterizzazione sequenziale dei limiti) (dim.). Successioni numeriche. Successioni convergenti, divergenti indeterminate. Primi esempi. Definizione di funzione continua.

28/10/16: Continuità della funzione esponenziale, dei logaritmi e delle potenze (dim. sequenziale). Il numero di Nepero e (dimostrazione della limitatezza e monotonia della successione $(1+1/n)^n$). Calcolo del limite in $x_0=0$ delle funzioni $(1+x)^{1/x}$, $(\log(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$, $((1+x^a)-1)/x$. Forme indeterminate per le potenze. Confronto tra infiniti.

02/11/16: Limitatezza delle successioni convergenti (dim.) e controesempi di funzione limitata ma non convergente.

Sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass (dim.). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 3: Es. 3.1 (4,7,8,10), Es: 3.2 (2,4), Es: 3.3 (1).

04/11/16: Serie numeriche. Condizione necessaria per la convergenza: il termine generale deve essere infinitesimo (dim.). Serie armonica (dim. del fatto che diverga). Serie geometrica. Criterio di condensazione di Cauchy, la serie armonica generalizzata. Serie a termini non negativi. Criterio del confronto (dim.) e criterio del confronto asintotico (dim.). Criterio della radice (dim.) e sua versione asintotica (dim.). Criterio del rapporto (dim.) e sua versione asintotica (dim.).

08/11/16: Teorema dell'algebra delle serie convergenti. Riepilogo e approfondimento sui criteri di convergenza per le serie a termini non

negativi. Riepilogo sugli strumenti per il calcolo dei limiti. Continuità di $\sin x$ e $\cos x$. **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 4: Es. 4.1 (2), Es: 4.2 (1,2,3,5), Es: 4.4 (2,9).

09/11/16: Confronto tra infiniti, Principio di sostituzione degli infiniti (dim.). Confronto tra infinitesimi, Principio di sostituzione degli infinitesimi (dim.). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 4: Es. 4.1 (3,6), Es: 4.4 (4,5,8). **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 5: Es. 5.1, Es. 5.2 (5,6,8).

11/11/16: Esercizi di riepilogo: Es. 5.2 (9,10,12,15), Es. 5.3 (1), Es. 5.4, Es. 4.10 (1), Es. 4.6, Es. 4.9 (1). Esercitazione pomeridiana (2 ore) sul testo di prototipo d'esonero.

18/11/16: Prova d'esonero.

22/11/16: Funzioni continue, classificazione delle discontinuità.

Continuità di somma, prodotto, rapporto e composizione di funzioni continue. Funzione di Dirichlet. Esempio di studio di continuità. Lo spazio vettoriale delle funzioni continue su un intervallo. Punti di estremo assoluto e Teorema di Weierstrass (dim.). Teorema degli zeri (dim.), Teorema dei valori intermedi (dim.), teorema sull'immagine di intervalli tramite funzioni continue (dim.). Funzioni monotone e loro discontinuità. Una funzione monotona limitata può avere al più una quantità numerabile di discontinuità di salto (dim.).

23/11/16: Una funzione continua su un intervallo è iniettiva se e solo se è strettamente monotona (dim.). Teorema di continuità della funzione inversa per funzioni continue su un intervallo aperto (dim.). Derivabilità, significato geometrico della derivata, differenziabilità. Retta tangente al grafico: definizione ed equazione cartesiana. Derivata destra e derivata sinistra. Punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale. Continuità delle funzioni derivabili (dim.). Calcolo delle derivate: derivata di somma, prodotto e rapporto (dim.).

25/11/16 (3 ore): Derivata delle funzioni composte (dim.). Derivate delle funzioni di base: funzioni costanti, lineari, esponenziale, logaritmo, potenza, seno, coseno, tangente. Derivata logaritmica. Derivata della funzione inversa (dim. geometrica), derivata dell'arcotangente. Estremi relativi, Teorema di Fermat (dim.), punti stazionari. Teorema di Rolle (dim.) e di Lagrange (dim.). Formula dell'incremento finito.

Caratterizzazione delle funzioni costanti (dim.). Test di monotonia (dim.). Asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

29/11/16: Funzioni convesse e concave. Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili attraverso la monotonia della derivata prima (dim.). Funzioni derivabili due volte e test di convessità.

Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili attraverso la proprietà delle tangenti al grafico (dim.). Esempi di stime ottenute per

convessità o concavità. Esempio di studio di funzione. **Svolgimento degli esercizi** del Foglio 6: Es. 6.1 (4), Es. 6.5, Es. 6.7.

30/11/16: Proprietà di Darboux delle derivate (dim.). Teorema di Cauchy (dim.). Teorema di de L'Hopital (dim. sia per le forme indeterminate 0/0 che per quelle infinito/infinito). Condizione sufficiente per la derivabilità in termini di limiti di derivate (dim.)

02/12/16: Derivate di ordine successivo. Polinomio di Taylor, formula di Taylor con resto di Peano (dim.) Polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ delle funzioni e^x , $\log(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$. Limiti con gli sviluppi di Taylor. Esempio di funzione con polinomio di Taylor centrato in 0 sempre nullo. **Svolgimento degli esercizi**: Foglio 6, Es. 6.2 (3), Es. 6.6. Foglio 7: Es 7.1 (1,8,18,23,26), Es 7.2 (6), Es 7.4 (2).

06/12/16: Unicità del polinomio di Taylor (dim.). Polinomio di Taylor della composizione di due funzioni (dim.). Coefficienti binomiali generalizzati e polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$ delle funzioni $(1+x)^a$. Ordine di infinitesimo e parte principale. **Svolgimento degli esercizi**: Limite con gli sviluppi di Taylor, Foglio 6, Es. 6.9. Foglio 7, Es. 7.5 (1). Foglio 8, Es. 1, Es. 14.

07/12/16: Studio dei punti stazionari tramite la formula di Taylor (dim.) Algebra degli infinitesimi (Es. 9.2). Formula di Taylor con resto di Lagrange (dim.). Primitive. Caratterizzazione delle primitive (dim.). Integrale indefinito. Primitive immediate, linearità dell'integrale indefinito. Metodo di integrazione per parti.

13/12/16: Esempi di primitive determinate con il metodo di integrazione per parti. Metodo di integrazione per sostituzione ed esempi, integrale logaritmico. Primitive delle funzioni razionali. Alcuni casi di base per l'integrazione di funzioni razionali con denominatore di secondo grado. **Svolgimento degli esercizi**: Foglio 8, Es. 8.22 (funzioni iperboliche), Es. 8.23 (1), Es.17. Foglio 9, Es. 9.1 (4).

14/12/16: Metodo generale di integrazione di funzioni razionali con denominatore di secondo grado. Formula di riduzione per il calcolo della primitiva di $(x^2+1)^{-n}$. Formule parametriche per integrali di funzioni trigonometriche. Alcune primitive di funzioni irrazionali semplici. Integrale definito, problema delle aree. Partizione di un intervallo, somme integrali superiori e inferiori, integrale superiore e inferiore, integrabilità secondo Riemann.

16/12/16: Funzione di Dirichlet. Monotonia delle somme integrali (dim.), confronto tra integrale superiore e inferiore (dim.), criterio di integrabili (dim.). **Svolgimento degli esercizi**: Foglio 9, Es. 9.3 (ii), Es. 9.4 (1).

20/12/16: Funzioni uniformemente continue. Uniforme continuità delle funzioni lipschitziane. Lipschitzianità delle funzioni $C^1([a,b])$ (dim.). $f(x)=x^2$ non è uniformemente continua su \mathbb{R} (dim.). Teorema di Heine-

Cantor (dim.). Teorema sull'integrabilità delle funzioni continue (dim.). Teorema sull'integrabilità delle funzioni monotone (dim.). Proprietà dell'integrale di Riemann: linearità, additività rispetto all'intervallo, monotonia, assoluta integrabilità. Interpretazione geometrica dell'integrale definito, aree orientate. **Svolgimento degli esercizi:** Foglio 9, Es. 9.5 (4), Es. 9.1 (3); Foglio 8, Es. 8.23 (2).

21/12/16: Teorema della media integrale (dim.). Teorema di Torricelli (dim.). Teorema fondamentale del calcolo integrale (dim.). Metodi di integrazione per parti e per sostituzione negli integrali definiti, esempi. Studio di una funzione integrale. **Svolgimento degli esercizi:** Foglio 11, Es. 11.7 (2,3).

10/01/17: Cenni sugli integrali impropri: integrali impropri di funzioni limitate su intervalli illimitati, integrali impropri di funzioni illimitate su intervalli limitati, teoremi di confronto asintotico. Integrabilità di $1/x^a$ in $[0,1]$ e su una semiretta destra. **Svolgimento degli esercizi:** Foglio 11, Es. 11.3, Es. 11.4, Es. 11.5 (2), Es. 11.6, Es. 11.8(1,2,3).

11/01/17: **Svolgimento degli esercizi:** Foglio 8, Es. 8.18; Foglio 9 Es. 9.3 (1), Es. 9.4 (3), Es. 9.5 (1,2).

13/01/17: **Svolgimento degli esercizi:** Foglio 8, Es. 8.20, Es.

8.6. Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive. Esercitazione supplementare con esercizi di riepilogo sulla seconda parte del corso.