



DIPARTIMENTO  
DI MATEMATICA

SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA



*Istituto Tecnico Tecnologico  
e Liceo Scientifico Biagio Pascal di Roma*

*Punti di vista*  
*Complementi interdisciplinari di geometria*  
*per il secondo anno del Liceo Matematico*

# **Musica e trasformazioni geometriche**

*Seminario Nazionale sui Licei Matematici – Università degli studi di Salerno - settembre 2018*

**Idea intuitiva:** osservazioni delle simmetrie in uno spartito

Esempio: “Offerta Musicale BWV 1079” di J.S.Bach



The image displays a handwritten musical score for the Crab Canon from J.S. Bach's Musical Offering. The score is presented in three systems, each consisting of two staves. The notation is mirrored across the staves, illustrating a palindromic structure. The first system is labeled "CRAB CANON JSB" in handwritten capital letters. The second system is labeled "aee WOUFAJ 2A72" in handwritten letters, which is a mirror image of the first system's label. The third system contains musical notation but no text label. The music is written in a key with two flats and a common time signature.

FIGURE 44. Crab Canon from the Musical Offering, by J. S. Bach. [Music printed by Donald Byrd's program "SMUT".]

**Idea intuitiva:** osservazioni delle simmetrie in uno spartito

Esempio: “Offerta Musicale BWV 1079” di J.S.Bach



The image displays a musical score for the Crab Canon from the Musical Offering by J.S. Bach. The score is written on three systems of two staves each, in G minor (three flats) and common time. A prominent red diagonal line is drawn across the entire score from the top-left to the bottom-right. Handwritten in black ink are two phrases: "CRAB CANON JSB" in the middle of the first system and "CRAB CANON JSB" in the middle of the second system, both written upside down relative to the printed music.

FIGURE 44. Crab Canon from the Musical Offering, by J. S. Bach. [Music printed by Donald Byrd's program "SMUT".]

**Idea intuitiva:** osservazioni delle simmetrie in uno spartito

Esempio: “Offerta Musicale BWV 1079” di J.S.Bach

The image shows a handwritten musical score for the Crab Canon from the Musical Offering by J.S. Bach. The score is written on three systems of two staves each, in G minor and 3/4 time. A prominent red diagonal line is drawn across the entire page from the top-left to the bottom-right. In the center of the page, the title "CRAB CANON JSB" is written in a simple, hand-drawn font. Below this, the title is mirrored and written upside down as "JSB CANON CRAB". The handwriting is somewhat rough and sketchy, suggesting it was written quickly or as a study.

FIGURE 44. Crab Canon from the Musical Offering, by J. S. Bach. [Music printed by Donald Byrd's program "SMUT".]

Il canone cancrizzante di Bach è un **palindromo musicale**, in cui la seconda voce parte dall'ultima nota della prima e segue quindi un andamento opposto ma armonico con essa.

The image displays a handwritten musical score for 'Crab Canon' by J.S. Bach. The score is written on three systems of two staves each, in a key signature of two flats (B-flat and E-flat) and a common time signature (C). The first system is labeled 'CRAB CANON JSB' and the second system is labeled 'are W0NFAJ QAFJ J'. The score is annotated with two lines: a red line and a blue line. The red line starts at the beginning of the first staff and ends at the end of the third staff, indicating the original direction of the music. The blue line starts at the beginning of the second staff and ends at the end of the first staff, indicating the mirrored direction of the second voice. Two green boxes highlight the first and last notes of the first staff, which are the starting and ending points of the palindromic structure.

FIGURE 44. Crab Canon from the Musical Offering, by J. S. Bach. [Music printed by Donald Byrd's program "SMUT".]

# Allo specchio

CRAB CANON

CRAB CANON

FIGURE 44. Crab Canon from the Musical Offering, by J. S. Bach. [Music printed by Donald Bird's program "SMUT".]

Prendiamo il piano  $(x,y)$  e riportiamo

sull'asse  $x$  il tempo scegliendo come unità di misura il minuto secondo e l'abbiniamo alla figura musicale semiminima (velocità metronomica = 60), cioè

Un quadretto sull'asse  $x$  corrisponde a una semiminima



sull'asse  $y$  l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto.

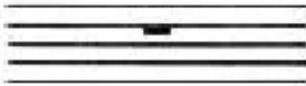
un quadretto sull'asse  $y$  rappresenta il tono riferito alla scala temperata

**Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge  $f$  in modo che  $y = f(x)$ .**

Può essere utile ricordare:

Per l'asse x:

## VALORI MUSICALI

NOTE	NOMI	VALORI	PAUSE	ASSE x
	(Semibreve)	<b>4/4</b>		<b>4 quadretti</b>
	(Minima)	<b>2/4</b>		<b>2 quadretti</b>
	(Semiminima)	<b>1/4</b>		<b>1 quadretto</b>
	(Croma)	<b>1/8</b>		<b>1/2 quadretto</b>
	(Semicroma)	<b>1/16</b>		<b>1/4 quadretto</b>

Per l'asse y:

T T S T T T T S

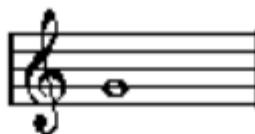
Do **Do #** Re **Re #** Mi Fa **Fa #** Sol **Sol #** La **La #** Si Do

S S S S S S S S S S S S

T = Tono  
S = Semitono

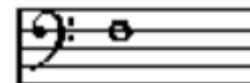
Note in rosso alterate in #

y = 0 corrisponde a



Sol

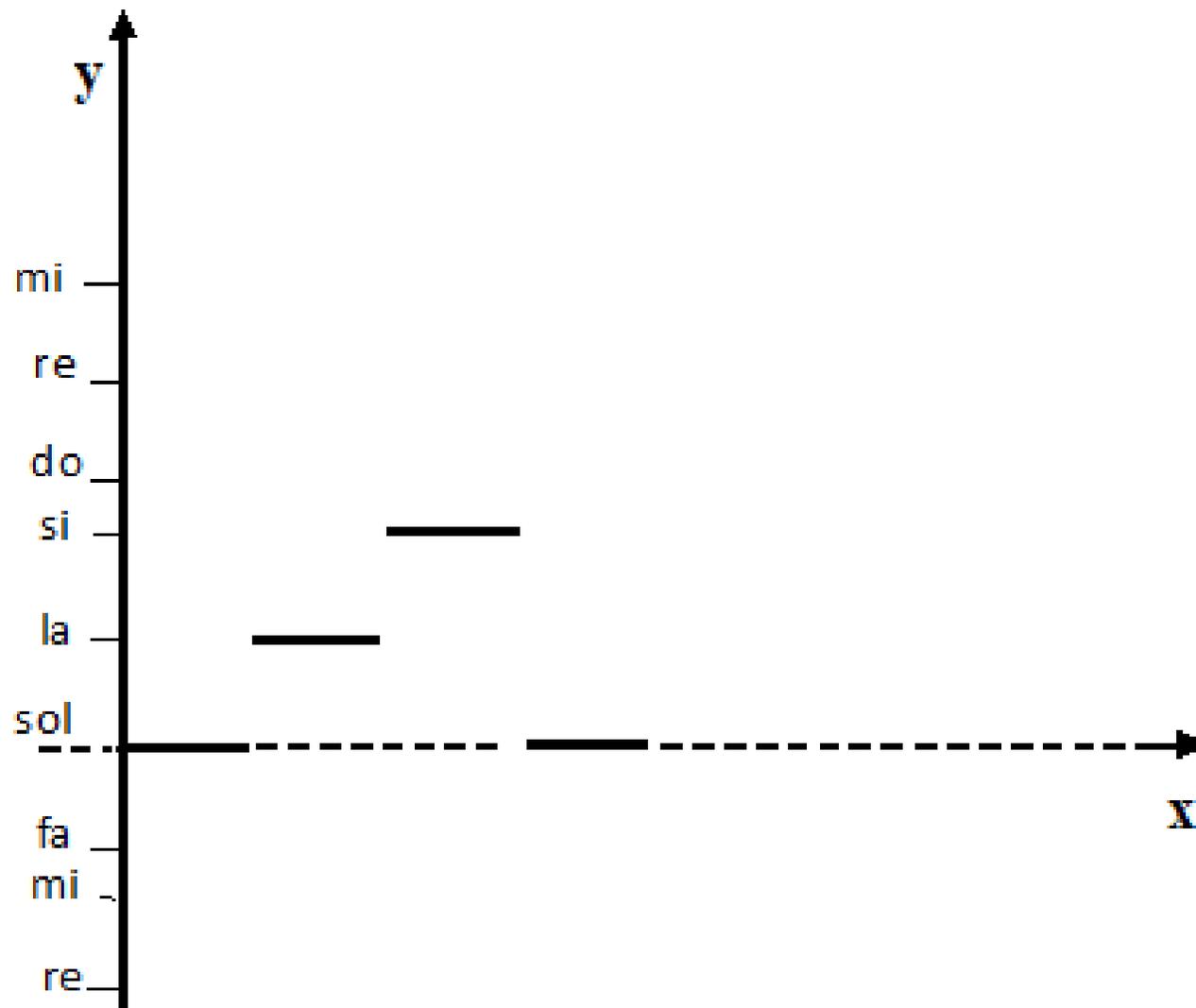
Chiave di violino o di *Sol*



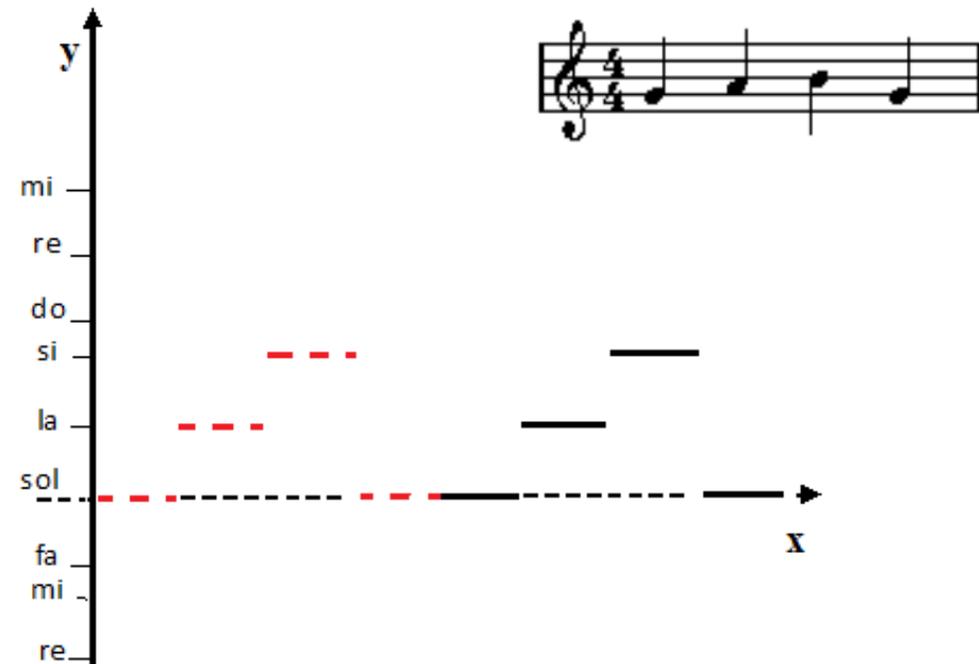
Fa

Chiave di basso o di *Fa*

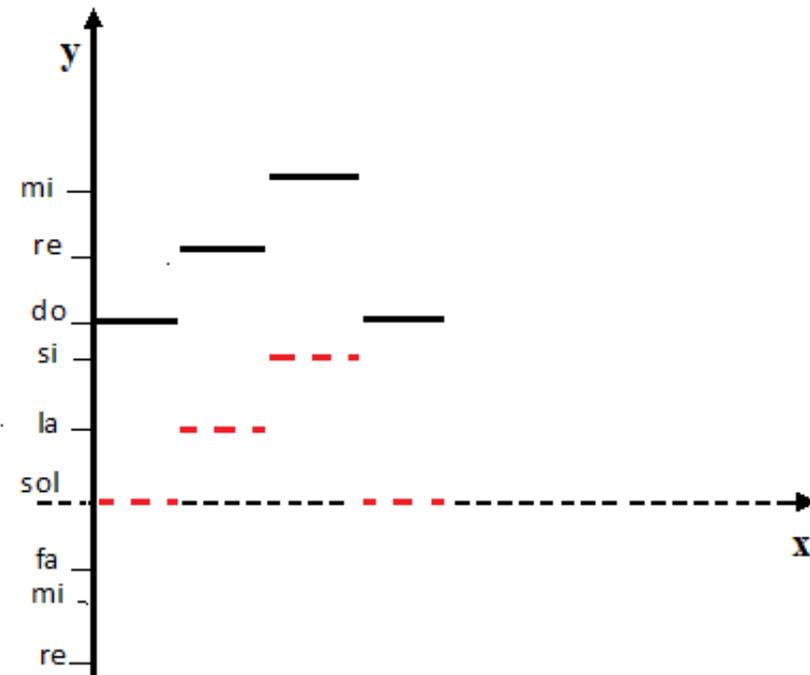
# Esempio 1:



**Esempio 2:** TRASLAZIONE orizzontale - Canone



**Esempio 3:** TRASLAZIONE verticale – Cambio di tonalità  
-quarta





# Soluzione es. 1: Fra' Martino

The image displays a musical score for the piece "Fra' Martino". It consists of two parts: a piano transcription at the bottom and a pitch contour graph above it.

**Piano Transcription:** The score is written in treble clef with a key signature of one sharp (F#) and a 4/4 time signature. The melody is composed of eighth and quarter notes, with some measures containing beamed eighth notes. The piece concludes with a double bar line.

**Pitch Contour Graph:** The graph plots the pitch of the melody on a vertical axis labeled 'Y' and time on a horizontal axis labeled 'X'. The vertical axis has labels: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. The horizontal axis is marked with vertical dashed lines corresponding to the measures of the piano transcription. The pitch contour is represented by horizontal line segments connected by vertical lines, showing the rise and fall of the melody's pitch over time.

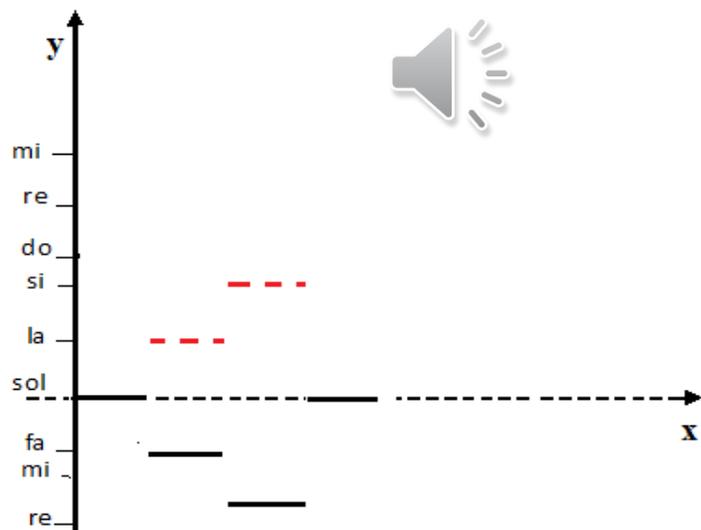
**Esercizio 2:** Tracciare il grafico simmetrico rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine della seguente melodia e scrivere lo spartito relativo.



## Soluzione es. 2:

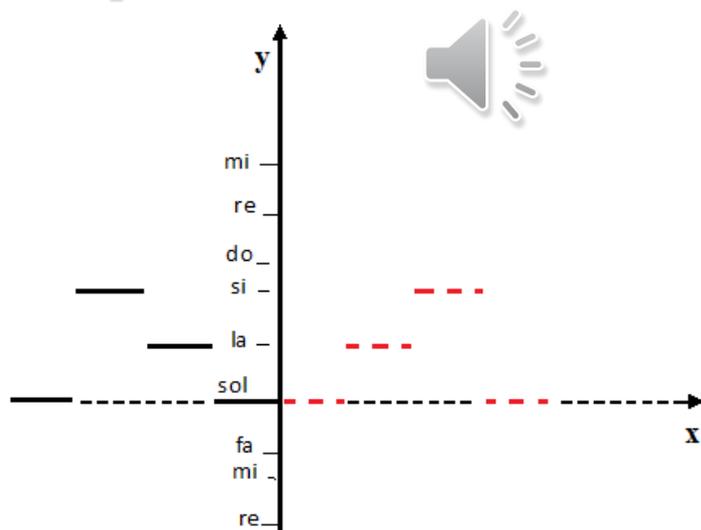
Simmetria rispetto all'asse x.

In musica questa trasformazione ha il nome di canone per moto contrario o inversione o ancora canone a specchio.



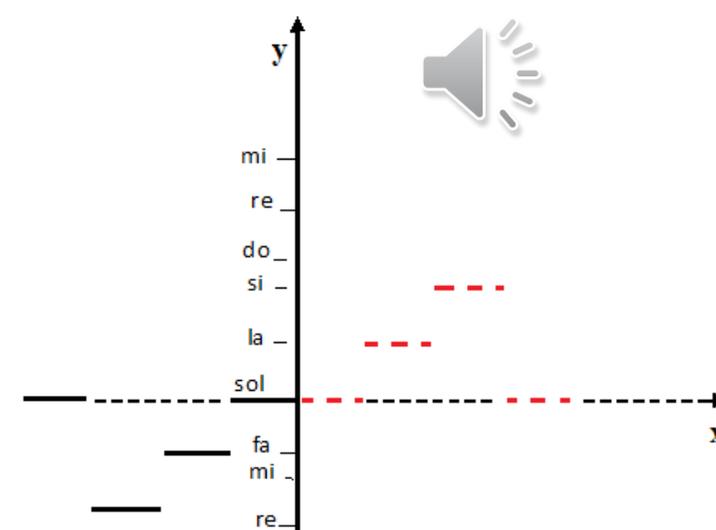
Simmetria rispetto all'asse y.

In musica questa trasformazione si chiama retrogrado o canone a granchio.



Simmetria rispetto all'origine.

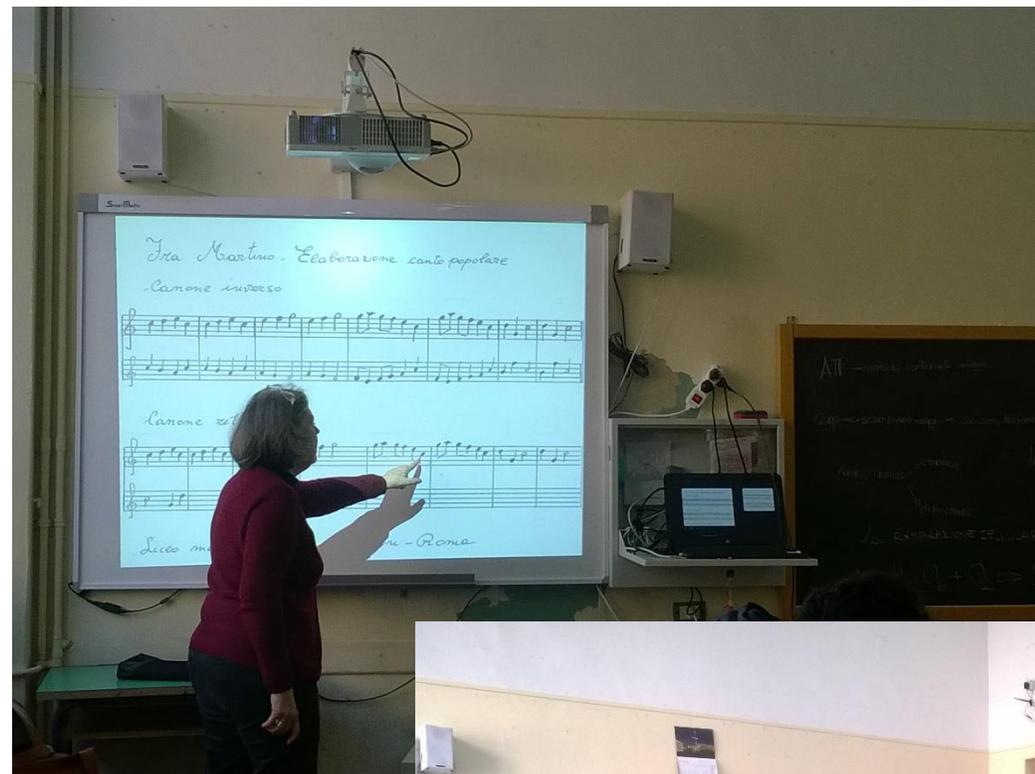
In musica questa trasformazione si chiama retrogrado dell'inverso.



**Esperienza didattica fatta nella seconda classe  
del liceo Newton  
Prof. Simonetta Valli**

Fra' Martino canone inverso (adattato)

$\text{♩} = 60$



**Esperienza didattica fatta nella seconda classe del liceo Newton**  
**Prof. Simonetta Valli**

Fra' Martino canone retrogrado (adattato)

$\text{♩} = 60$



## **Conclusione:**

La magia della simmetria è uno degli elementi che collega matematica e musica, in quanto le tecniche compositive che permettono di eseguire variazioni a partire da un tema prescelto sono basate sul concetto di simmetria.

Matematica e musica sono indissolubilmente legate: le strutture matematiche sono alla base delle armonie, delle tecniche di composizione e della scrittura musicale.

Matematica e musica inoltre costituiscono un linguaggio universale: tutti i matematici del mondo operano attraverso un sistema di simboli che può essere compreso indipendentemente dalla lingua parlata, così come uno spartito può essere tradotto in musica senza bisogno di passare attraverso il linguaggio.

## Animazione del Canone Cancrizzante di Bach

[https://www.youtube.com/watch?v=Y0\\_DeHSTLHU](https://www.youtube.com/watch?v=Y0_DeHSTLHU)



### Siti di riferimento:

<http://math.unipa.it/~grim/musica.pdf>

[http://online.scuola.zanichelli.it/bergaminibianco/wp-content/uploads/Esp\\_L3\\_musica.pdf](http://online.scuola.zanichelli.it/bergaminibianco/wp-content/uploads/Esp_L3_musica.pdf)

<http://lucacalatroni.weebly.com/uploads/2/3/7/8/23782219/approfondimento.pdf>

<http://math.unipa.it/~grim/musica.pdf>