Equazioni Differenziali Ordinarie A. A. 2014/2015

Diario delle lezioni

- 1 4/3: Presentazione del corso. Modelli ecologici 1d: crescita costante e modello logistico.
- 2 6/3: Modello predatore-preda di Lotka Volterra. Problema della catenaria. Pendolo semplice ed oscillatore armonico. Equazioni differenziali ordinarie: ordine e dimensione, definizione di soluzione, equazioni in forma normale. Riduzione di equazioni di ordine k ad equazioni del primo ordine. Equazioni autonome e ritratto di fase. Problema di Cauchy e sua buona posizione.
- 3 11/03: Esempi di non esistenza e di non unicità per il problema di Cauchy. Funzioni localmente Lipschitziane in x uniformemente in t : definizione, costante di Lipschitz, locale lipschitzianità delle funzioni con derivate spaziali continue. Esempio: $|x|^a$, $a > 0$. Formulazione integrale del problema di Cauchy, mappa di Picard. Teorema di punti fisso per una famiglia di funzioni: esistenza, unicità e dipendenza continua dal parametro (con dim.) Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua dal dato iniziale in ipotesi di Lipschitz (con dim. basata sulle proprietà di punto fisso della mappa di Picard).
- 4 13/03: Metodo di risoluzione delle equazioni differenziali scalari a variabili separabili, esempi. Studio qualitativo di equazioni scalari autonome: condizioni per l'esistenza globale, per l'esplosione in tempo finito e per il raccordo con le soluzioni costanti. Esempi. Teorema dell'asintoto.
- 5 18/03: Equazioni lineari scalari omogenee. 1-forme differenziali ed equazioni differenziali esatte: richiami sulle 1-forme differenziali ed equazione del pull-back. Relazione tra le soluzioni di un'equazione differenziale e le soluzioni dell'equazione del pull-back associata (con dim.). Relazione tra le soluzioni dell'equazione del pull-back per una forma esatta e gli insiemi di livello del potenziale (con dim.). Esempio di equazione scalare esatta. Metodo del fattore integrante, condizioni per determinare un fattore integrante che dipenda da una sola delle variabili. Esempio di equazione esatta a meno di un fattore integrante.
- 6 20/03: Determinazione dell'integrale generale per le equazioni lineari non omogenee scalari con il metodo del fattore integrante. Integrali primi per sistemi autonomi e loro caratterizzazione geometrica (con

- dim.). Sistemi conservativi ed energia. Integrali primi per sistemi autonomi bidimensionali, sistemi Hamiltoniani bidimensionali. Calcolo dell'integrale primo per il modello di Lotka-Volterra.
- 7 25/03: Equazioni di Bernoulli ed equazioni omogenee. Esercizi di riepilogo sui metodi di risoluzione.
- 8 27/03: Lemma di Gronwall (con dim.) e sua versione semplificata (con dim.). Soluzioni epsilon-approssimate: definizione e versione integrale. Il Teorema di esistenza Peano: costruzione delle spezzate di Eulero, stime a priori e passaggio al limite.
- 9 1/04: Fenomeno del pennello di Peano (cenni). Stima per le soluzioni epsilon-approssimate in ipotesi di Lipschitzianità del campo (con dim.) e conseguenze: unicità locale (con dim.), dipendenza lipschitziana delle soluzioni dal dato iniziale (con dim.) e convergenza delle spezzate di Eulero (con dim.). Prolungamenti, soluzioni massimali. Esistenza ed unicità del prolungamento massimale (con dim.), intervallo massimale di definizione. Comportamento delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di definizione (con dim.). Soluzioni globali. Le soluzioni massimali con norma limitata da una funzione continua sono globali (con dim.).
- 10 8/04: Esistenza globale delle soluzioni per equazioni con campo sublineare (con dim.). Sistemi conservativi con potenziale limitato inferiormente. Esercizi di riepilogo.
- 11 10/04: Sistemi lineari di equazioni differenziali: definizione, globalità delle soluzioni. Sistemi lineari omogenei. Struttura dell'integrale generale (isomorfismo con $\mathbb{R}^n$) (con dim.). Matrici di soluzioni, sistemi fondamentali di soluzioni, matrici fondamentali, matrice fondamentale speciale. Derivata di una matrice ad entrate derivabili, derivata del prodotto di matrici. Caratterizzazione della matrice fondamentale speciale come l'unica soluzione matriciale di un opportuno problema di Cauchy e rappresentazione delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali tramite la matrice fondamentale speciale (con dim.). Come ricavare la matrice fondamentale speciale conoscendo una matrice fondamentale, relazione tra matrici fondamentali, proprietà di semigruppato e di derivabilità della matrice fondamentale speciale (con dim.). Wronskiano, proprietà del wronskiano, Teorema di Liouville ed identità di Abel (senza dim.), Sistema lineare che descrive la dinamica di un oscillatore armonico: suo integrale generale e sua matrice fondamentale speciale.
- 12 15/04: Determinazione di una matrice fondamentale per sistemi lineari triangolari bidimensionali. Sistemi lineari non omogenei: struttura dell'integrale generale, metodo di variazione delle costanti, formula di Duhamel (con dim.). Sistemi lineari a coefficienti costanti: introduzione

alla matrice esponenziale. Richiami di algebra lineare.

13 17/04: Esercizi di riepilogo

14 29/04: Operatore complessificato e sua matrice di rappresentazione. Autovalori, autovettori e autospazi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Matrici diagonalizzabili, criterio di diagonalizzabilità in campo complesso. Operatori lineari e limitati in spazi di Banach. Norma operatoriale, composizione, struttura di algebra normata sullo spazio degli operatori continui e limitati. Lo spazio degli operatori lineari e limitati su uno spazio di Banach è un'algebra di Banach (con dim.). Serie di operatori lineari e limitati in spazi di Banach, convergenza puntuale e convergenza assoluta. Operatore esponenziale e sue proprietà (con dim.). Funzioni a valori in spazi di Banach, continuità e derivabilità.

15 6/05: Derivata di $\text{Exp}(At)$ (con dim.). Soluzioni di problemi evolutivi lineari in spazi di Banach. Derivabilità delle soluzioni di problemi di Cauchy rispetto al dato iniziale: euristica; risultato di esistenza e caratterizzazione delle derivate direzionali (con dim.). Dipendenza continua della matrice fondamentale speciale di un sistema lineare omogeneo dalla matrice dei coefficienti (con dim.).

16 8/05: Differenziabilità delle soluzioni di equazioni generali rispetto al dato iniziale (con dim.). Matrice esponenziale di matrici diagonali e diagonalizzabili in campo reale. Riduzione di applicazioni lineari e matrici diagonali a blocchi. Riduzione di una matrice a coefficienti reali diagonalizzabile in campo complesso e sua matrice esponenziale.

17 13/05: Matrici non diagonalizzabili in campo complesso: forma canonica di Jordan, autospazi generalizzati e loro proprietà (senza dim.), cicli di autovettori generalizzati, forma esplicita della matrice esponenziale. Forma esplicita delle soluzioni (sia in campo complesso che in campo reale) di un sistema lineare a coefficienti costanti.

18 15/05: Esercizi di riepilogo sulla determinazione dell'integrale generale di sistemi lineari omogenei autonomi. Criterio di stabilità e suo corollario (con dim.)

19 20/05: Criterio di instabilità (con dim.), Criterio di limitatezza (con dim.). Flussi lineari iperbolici. Contrazioni ed espansioni. Teorema sulla varietà stabile ed instabile (senza dim.). Ritratti di fase dei sistemi lineari autonomi bidimensionali: caso degenerare e selle.

20 22/05: Ritratti di fase dei sistemi lineari autonomi bidimensionali: nodi, stelle, nodi impropri, fuochi e centri. Equazioni differenziali lineari scalari di ordine superiore: sistema lineare del primo ordine associato, problema di Cauchy, struttura dell'integrale generale per le equazioni omogenee e non omogenee. Sistema fondamentale di soluzioni. Metodo di variazione delle costanti. Polinomio caratteristico e

determinazione esplicita dell'integrale generale per equazioni di ordine superiore a coefficienti costanti.

- 21 27/05: Equazioni differenziali lineari scalari di ordine superiore: principio di sovrapposizione e metodo di somiglianza. Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti. Oscillatore armonico smorzato e forzato, risonanza. Esercizi di riepilogo su sistemi lineari e equazioni lineari di ordine superiore.
- 22 29/05: Punti non singolari per sistemi nonlineari autonomi, teorema di rettificabilità locale (con dim.). Teorema di Hartman-Grobman (senza dim.). Equilibri stabili, attrattivi ed asintoticamente stabili. Stabilità e attrattività di soluzioni non costanti. Confronto tra stabilità e dipendenza continua. Esercizi di riepilogo sui sistemi lineari.
- 23 3/06: Teorema di stabilità lineare (senza dim.), Teorema di stabilità per sistemi lineari perturbati (con dim.) e di instabilità (senza dim.). Principio di stabilità linearizzata (con dim.). Esempio di perturbazione di centri. Esempio di studio di equilibri per linearizzazione.
- 5/06: Esercizi di riepilogo.