ANALISI MATEMATICA II – A.A. 2018/2019 (A. Malusa)

DIARIO DELLE LEZIONI

1 24/09: curve parametriche, definizione ed esempi: rette, circonferenza, strofoide. Curve semplici e chiuse. Curve equivalenti, curve orientate. Calcolo differenziale per le curve: derivabilità, retta tangente alla curva.

2 25/09: curve regolari e versore tangente. Concatenamento di curve, curve regolari a tratti. Elementi di calcolo differenziale su curve, derivata del prodotto scalare, ortogonalità tra posizione e velocità (dim.). Integrale definito di una parametrizzazione e sue proprietà di base. Disuguaglianza triangolare per l'integrale definito di una parametrizzazione (dim.). Lunghezza di una curva, curve rettificabili. Esempio di curva non rettificabile. Teorema sulla rettificabili delle curve C^1 (dim.).

3 27/09: Rettificabilità delle curve lipschitziane (dim.). Lunghezza di un grafico. Ascissa curvilinea e parametrizzazione in parametro arco. Esempi. Dominio di funzioni reali di più variabili reali. Spazi metrici e insiemi connessi. Caratterizzazione dei sottoinsiemi connessi di R, l'immagine di un connesso tramite una funzione continua è connesso, teorema dei valori intermedi per funzioni reali di più variabili reali. Connessione per archi in R^n. Ogni insieme connesso per archi è connesso (dim).

4 01/10: Ogni aperto connesso è connesso per archi (dim.). Insiemi convessi e stellati. Teorema di decomposizione di un aperto in componenti connesse (dim.). Applicazione della connessione allo studio del segno di una funzione continua di più variabili reali. Svolgimento e approfondimenti Es.7 e 9 del Foglio 1.

5 02/10: Grafici e insiemi di livello di funzioni reali di più variabili reali. Funzioni a simmetria radiale, funzioni positivamente 1-omogenee e 2-omogenee. Funzioni lineari. Sella. Svolgimento e approfondimenti Es.2,3,4 e 8 del Foglio 1.

6 04/10: Limiti finiti al finito, limiti finiti e limiti all'infinito. Funzioni continue. Esercizi di riepilogo sullo studio e sul calcolo dei limiti.

7 08/10: Altri esempi di calcolo dei limiti. Integrale curvilineo di una funzione di più variabili: motivazioni e definizione. Invarianza per parametrizzazioni equivalenti (dim.). Esempi, baricentro di una curva. Introduzione al calcolo differenziale per funzioni di più variabili. Derivate parziali.

8 09/10: Derivabilità, gradiente. Derivate direzionali. Esempi. Differenziabilità. Le funzioni differenziabili sono continue e derivabili (dim.).

9 11/10: Teorema di derivabilità delle restrizioni (dim.). Formula del Gradiente e informazioni geometriche sul gradiente. Teorema del differenziale totale (dim.).

10 15/10: Teorema di Lagrange (dim.) e conseguenze: Lipshitzianità delle funzioni a gradiente limitato (dim.), funzioni a gradiente nullo (dim.). Esempio di funzione C^1 su un insieme limitato e non lipshitziana. Svolgimento e approfondimenti: Es. 2,5,6,8 del Foglio 2.

11 16/10: Derivate seconde, matrice Hessiana. Teorema di Schwarz (dim.).

Operatore di Laplace e cenni sulle equazioni alle derivate parziali. Derivate successive. Formula di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange (dim.) e con resto di Peano (dim.)

12 18/10: Punti massimo e minimo relativo. Teorema di Fermat (dim.). Punti stazionari. Condizione necessaria al secondo ordine in punti di max o min relativo (dim.). Matrici definite (positive o negative), matrici semidefinite e indefinite, esempi. Stima per la forma quadratica associata a una matrice simmetrica (dim.). Condizioni sufficienti per l'ottimalità (dim.). Caratterizzazione della definitezza per matrici simmetriche con i minori principali di nord-ovest (dim. per dimensione 2).

13 22/10: Riepilogo delle condizioni di segno sulle forme quadratiche per matrici simmetriche bidimensionali e condizioni sufficienti per l'ottimalità nel caso n=2. Esercizio su determinazione e studio dei punti stazionari di una funzione di 2 variabili. Svolgimento e approfondimenti: Es. 4 e 9 del Foglio 3.

14 23/10: Funzioni vettoriali: esempi, limiti e continuità, derivabilità e matrice Jacobiana. Differenziabilità. Funzioni composte, funzioni di due variabili in coordinate polari. Teorema di differenziabilità delle funzioni composte (dim.). Esempio: gradiente di una funzione di due variabili in coordinate polari. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, determinante Jacobiano.

15 25/10: Teorema di invertibilità locale (dim.).

16 05/11: Teorema del Dini, caso n=m=1 (dim.) Teorema del Dini, caso generale (dim. basata sull'utilizzo del teorema di invertibili locale).

17 06/11: k-varietà in R^n: definizione, superfici parametriche nello spazio, cilindro, superficie sferica. Varietà grafico e varietà definite in forma implicita, equivalenza locale tra i vari punti di vista. Curve su una varietà.

18 08/11: Spazio tangente ad una k-varietà, sua caratterizzazione tramite la parametrizzazione della superficie (dim.) e tramite la funzione che definisce la superficie in forma implicita (dim.). Spazio normale alla superficie. Esempi. Ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti di una funzione regolare su un sottoinsieme compatto di R^n.

19 12/11: Svolgimento e approfondimenti: Es. 8.1, 8.6 del Foglio 5. Esercizi di riepilogo sulla prima parte del corso.

20 13/11: Prima prova d'esonero.

21 15/11: Punti di estremo vincolato. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (dim.). Introduzione alla teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue.

22 19/11: Costruzione della misura di Lebesgue. Volume dei rettangoli n-dimensionali e sue proprietà: additività, subadditività, σ-subadditività (dim.). Misura esterna di Lebesgue e sue proprietà. Insiemi misurabili secondo Lebesgue e loro proprietà. Criterio di misurabilità alla Caratheodory. Misura di Lebesgue e sue proprietà.

23 20/11: Insiemi di Vitali; ogni insieme di misura positiva contiene un sottoinsieme non misurabile (dim.). Funzioni misurabili, esempi: funzioni caratteristiche, funzioni continue e semicontinue. Proprietà delle funzioni misurabili. Integrale di funzioni semplici.

24 22/11: Proprietà dell'integrale di funzioni semplici (dim.). Integrale di Lebesgue per funzioni misurabili, integrabilità. Proprietà di base dell'integrale

di Lebesgue (dim.).

25 26/11: Approssimazione monotona di funzioni misurabili non negative con funzioni semplici (dim.) Teorema di Beppo Levi (dim.). Svolgimento e approfondimenti: Es. 3 e 4 del Foglio 5.

26 27/11: Linearità dell'integrale di Lebesgue (dim.), additività sugli insiemi di integrazione (dim.), assoluta integrabilità (dim.). Confronto tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue (dim.). Teorema di Fubini-Tonelli.

27 29/11: Formule di riduzione degli integrali multipli: domini normali del piano, domini normali nello spazio e integrazione per fili, integrazione per strati nello spazio, esempi.

28 03/12 (3 ore): Applicazioni degli integrali multipli: volume di solidi di rotazione, massa e baricentro. Simmetrie e integrali multipli. Confronto tra integrale di Lebesgue e integrali impropri. Campi vettoriali, lavoro, campi conservativi.

29 04/12: 1-forme differenziali. Differenziale di una funzione differenziabile. Forme esatte. Integrale curvilineo di 1-forme differenziali e sue proprietà.

30 06/12: Svolgimento e approfondimenti: Es. 8.4 del Foglio 5, Es. 2,4,6 del Foglio 6.

31 10/12: Caratterizzazione delle forme differenziali esatte (dim.). Potenziale e lavoro del campo gravitazionale. Rotore, campo di velocità di un fluido viscoso, interpretazione sperimentale del rotore.

32 11/12: Forme differenziali chiuse. Omotopia tra curve e insiemi semplicemente connessi. Teorema di omotopia (dim.).

33 13/12: Continuità e derivabilità di funzioni definite da integrali parametrici (dim.) Esercizi di riepilogo e complementi sulle 1-fome differenziali. Orientazione positiva del bordo di un insieme regolare del piano.

34 17/12: Formule di Gauss-Green nel piano (dim.) e applicazioni: Teorema di Stokes nel piano, formule di integrazione per parti, calcolo delle aree, teorema della divergenza nel piano.

35 18/12: Riepilogo e approfondimento sugli operatori differenziali: gradiente (di funzione scalare e vettoriale), interpretazione fisica. Divergenza, flussi, campi solenoidi. Laplaciano. Leggi di conservazione, equazione del calore. Formula di Green per il Laplaciano, applicazione al campo di velocità di un fluido incomprimibile in un contenitore.. Rotore, parte antisimmetrica della matrice Jacobiana del campo. Leggi di Maxwell.

36 20/12: Superfici parametriche regolari nello spazio, versore normale. Cambiamenti ammissibili di parametro e parametrizzazioni equivalenti. Euristica e definizione dell'area di una superficie. Area di grafici. Integrale superficiale di funzione.

37 07/01: Superfici regolari orientabili, superfici regolari a pezzi, esempi. Teorema della divergenza (cenni della dim.). Superfici regolari orientabili fin sul bordo.

38 08/01: Superfici regolari e orientabili fin sul bordo, orientazione canonica di una superficie con bordo. Teorema di Stokes (cenni della dimostrazione). Cambiamento di variabile negli integrali: euristica su come si trasforma la misura di un insieme per diffeomeorfismi, formula di cambiamento di

variabile. Applicazione alle coordinate polari, esempi.

39 10/01: Misurabilità di immagini di insiemi misurabili (dim.) e applicazione alle immagini di diffeomorfismi. Teorema di cambiamento di variabili negli integrali (dim. assumendo noto il cambiamento di misura per diffeomorfismi). Svolgimento e approfondimenti: Es. 4, 7.1 e 10 del Foglio 8.

40 14/01: Cambiamenti di variabili: coordinate polari, cilindriche e sferiche. Esempi. Formula di cambiamento di misura per trasformazioni affini (dim.).

41 15/01 (4 ore): Lemma di approssimazione affine su cubetti (dim.) e applicazione alla formula di cambiamento di misura dei rettangoli - e, conseguentemente di ogni insieme misurabile per diffeomorfismi (dim.). Esercizi di riepilogo sulla seconda parte del corso.

42 17/01: Esercizi di riepilogo.