CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PRIMO ESONERO – 16/04/2014

Esercizio 1. Determinare (eventualmente in forma implicita) le soluzioni del sistema autonomo bidimensionale

$$\begin{cases} x' = x - 2xy \\ y' = y^2 + 3xy^2 - y - 3xy. \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = y\cos(x+y) \\ y' = -x\cos(x+y) \end{cases}$$

a) mostrare che ha tutte soluzioni globali;
b) mostrare che ha tutte soluzioni periodiche.

Esercizio 3. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (x-1)\sqrt[3]{x-3} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

determinare (fornendo le opportune giustificazioni) per quali valori di $x_0 \in \mathbb{R}$

a) esiste almeno una soluzione locale;
b) la soluzione massimale è unica;
c) le soluzioni sono strettamente concave;
d) le soluzioni (massimali) sono globali.

e disegnare il grafico qualitativo delle soluzioni nel piano (t, x).

Esercizio 4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale scalare

$$tx' + x(1 - tx^n) = 0$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
SECONDO ESONERO – 17/06/2014

Esercizio 1. Determinare la varietà stabile e la varietà instabile del sistema lineare omogeneo autonomo

$$\begin{cases} x_1' = -2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_2' = -x_2 - x_3 \\ x_3' = x_2 - 3x_3 \\ x_4' = -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x' = -4x - 10y + 2e^{-2t} \\ y' = 2x + 4y - e^{-2t} \end{cases}$$

a) determinare l'integrale generale del sistema omogeneo associato, classificandone l'equilibrio nell'origine;
b) determinare la soluzione del problema di Cauchy per sistema non omogeneo con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

Esercizio 3. Determinare gli equilibri del sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = y(x^2 - 4 - y) \\ y' = x(4 - x^2 - y) \end{cases}$$

e studiarne, quando è possibile, la stabilità per linearizzazione.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DEL 20/06/2014

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x'' - x = (1 + e^t)^2.$$

Esercizio 2. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\alpha x^2 y - x^5 - (\alpha - 1)x \end{cases}$$

a) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è hamiltoniano e, in questi casi, determinarne un integrale primo.
b) Studiare per linearizzazione la stabilità dell'equilibrio nell'origine, quando questo è possibile.

Esercizio 3. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione locale;
b) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale;
c) determinare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione è limitata;
d) studiare la monotonia e la convessità delle soluzioni;
e) disegnare le traiettorie sul piano (t, x).

Esercizio 4. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo autonomo

$$\begin{cases} x' = -2x + z \\ y' = -y - z \\ z' = y - 3z \end{cases} .$$

Esercizio 5. Dato il sistema autonomo bidimensionale

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = h(x) - 2y, \qquad h \in C^1(\mathbb{R}),\ h(0) = 0, \end{cases}$$

dare condizioni sulla funzione h affinchè l'origine

a) sia un equilibrio asintoticamente stabile;
b) sia un equilibrio instabile.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DELL' 11/07/2014

Esercizio 1. Determinare (eventualmente in forma implicita) l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x' = \frac{7tx^2 - t^3}{7x}.$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare autonomo

$$\begin{cases} x' = -7x - 2y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$$

a) Determinarne l'integrale generale e classificarne l'equilibrio nell'origine.
b) Determinarne la varietà stabile e la varietà instabile.
c) Determinare la forma esplicita delle soluzioni del sistema che entrano nell'origine per $t \to +\infty$.
d) Disegnarne il ritratto di fase.

Esercizio 3. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) determinare i valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui esiste una soluzione locale;
b) determinare i valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui tale soluzione è unica;
c) determinare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono globali;
d) studiare la monotonia e la convessità delle soluzioni;
e) disegnare le traiettorie sul piano (t, x).

Esercizio 4. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = xy^2 + \alpha x \\ y' = -x^2 y + \alpha y \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

a) le traiettorie del sistema si mantengono a distanza fissa dell'origine;
b) le traiettorie del sistema tendono ad avvicinarsi all'origine;
c) le traiettorie del sistema tendono ad allontanarsi dall'origine.

Esercizio 5. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 y - 4y \\ y' = x^2 - y^2, \end{cases}$$

e studiarne la stabilità per linearizzazione.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DELL' 08/09/2014

Esercizio 1. Mostrare che la mappa P definita da

$$P[u](t) = \int_0^t (1 + u^2(s))\, ds$$

è una contrazione nello spazio

$$X = \{u \in C([0, 1/4]),\ |u(t)| \leq 1/2 \text{ per ogni } t \in [0, 1/4]\}$$

con la norma uniforme e si determini esplicitamente il punto fisso.

Esercizio 2. Dato il sistema lineare autonomo

$$\begin{cases} x' = 2z + y \\ y' = 2z + y \\ z' = 0 \end{cases}$$

a) Determinarne l'integrale generale.
b) Discutere il comportamento delle soluzioni per $t \to +\infty$ al variare del dato iniziale $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in $t = 0$.

Esercizio 3. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{|x^2 + x - 2|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) determinare i valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui esiste una soluzione locale;
b) determinare i valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui tale soluzione è unica;
c) determinare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono globali;
d) disegnare le traiettorie sul piano (t, x).

Esercizio 4. Mostrare che tutti i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -4x^3 e^{x^2 y^3} \\ y' = -4y^3 e^{x^2 y^3} \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

hanno soluzioni globali in avanti.

Esercizio 5. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - 3x^2 \\ y' = x^2 + y^2 - 4, \end{cases}$$

e studiarne la stabilità per linearizzazione.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DELL' 19/09/2014

Esercizio 1. Determinare, eventualmente in forma implicita, l'integrale generale del sistema bidimensionale

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{8}{3}x^2 y - x^2 \\ y' = 3xy + 4xy^2 - x^2 y. \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare la varietà stabile e la varietà instabile del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 \\ x_2' = 6x_2 \\ x_3' = -x_2 - 5x_3 + x_4 \\ x_4' = 9x_2 - x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Esercizio 3. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 + \sin x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) determinare i valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'unica soluzione;
b) determinare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale;
c) studiare la monotonia e la concavità delle soluzioni;
d) disegnare le traiettorie sul piano (t, x).

Esercizio 4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sin t}{\cos t} x \\ y' = xe^{-y} \\ x(2\pi) = 1 \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 - xy \\ y' = 2 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

e studiarne la stabilità per linearizzazione.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DEL 10/11/2014

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x \log y \\ y' = y \log x. \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare autonomo

$$\begin{cases} x' = -5x - 2y \\ y' = 2x - 10y \end{cases}$$

a) Determinarne l'integrale generale e classificarne l'equilibrio nell'origine.
b) Determinarne la varietà stabile e la varietà instabile.
c) Disegnarne il ritratto di fase.

Esercizio 3. Indicando con $x(t; t_0, x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + a(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad a, f \in C(\mathbb{R}),\ \ t_0, x_0 \in \mathbb{R}$$

a) mostrare che $x(t; t_0, x_0)$ è derivabile parzialmente rispetto al dato iniziale x_0;
b) mostrare che la derivata $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} w' + aw = 0 \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^x (x - \pi) \cos x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione locale;
b) determinare le soluzioni costanti;
c) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale;
d) studiare la monotonia delle soluzioni;
e) disegnare le traiettorie sul piano (t, x).

Esercizio 5. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{cases} x' = x(2 - x - y) \\ y' = y(6 - y - 2x), \end{cases}$$

e studiarne la stabilità per linearizzazione.

CORSO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PROVA SCRITTA DEL 19/01/2015

Esercizio 1. Determinare (eventualmente in forma implicita) la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} x' = \dfrac{e^x - 1}{x - t} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare autonomo

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 4z \\ y' = x + 4y - z \\ z' = x + 5y - 2z \end{cases}$$

a) Determinarne la varietà stabile e la varietà instabile.
b) Calcolare il $\lim_{t\to+\infty} \|u(t;\xi_0)\|$, dove $u(t;\xi_0)$ è la soluzione del sistema con dato iniziale $u(0;\xi_0) = \xi_0 = (-3, 0, -3)$.

Esercizio 3. Siano b,$c \in C(\mathbb{R})$ e sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una soluzione non banale dell'equazione lineare omogenea

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = 0.$$

Dimostrare che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$u(t) = \varphi(t)\left[c_1 + c_2 \int_0^t \frac{e^{-\int_0^s b(\sigma)\,d\sigma}}{\varphi^2(s)}\,ds\right].$$

Esercizio 4. Dati i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x + 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione;
b) mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale;
c) studiare la monotonia delle soluzioni e disegnare le traiettorie sul piano (t, x);
d) determinare esplicitamente la soluzione corrispondente a $x_0 = 0$ almeno in un opportuno intorno di $t = 0$.

Esercizio 5. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x^7y^2 + y^3 \\ y' = -x^8y - xy^2 \end{cases}$$

dimostrare che l'origine è un equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile, del sistema.