ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto

Scheda di esercizi n. 1

1. Convertire 10^6 in base $2, 6, 26$ (usare le lettere da A a Z per la base 26).
2. Convertire $3,1415926\ldots$ in base 2 con 15 cifre decimali, e poi in base 26 con tre cifre decimali.
3. Convertire $e = 2,7182818\ldots$ in base 2 con 15 cifre decimali, e poi in base 26 con tre cifre decimali.
4. In base 10, $(11001001)_2 =$? $(BAD)_{26} =$? E $(B, AD)_{26} =$?.
5. Eseguire la seguente moltiplicazione $160 * 199$ in base 7.
6. Calcolare il prodotto di $(212)_3$ per $(122)_3$.
7. Eseguire le divisioni $(1100101)_2 : (100111)_2$; $(HAPPY)_{26} : (SAD)_{26}$.
8. Quante *operazioni bit* richiede la moltiplicazione di due numeri di k bit ciascuno?
9. Stimare una limitazione superiore per il numero di operazioni bit necessarie per calcolare $n!$.
10. Stimare una limitazione superiore per il numero di operazioni bit necessarie per calcolare il prodotto di un polinomio di grado n_1 per un polinomio di grado n_2, assumendo che i coefficienti siano interi positivi inferiori o uguali a m.
11. Dare una limitazione superiore per il numero di operazioni bit necessarie per calcolare di $\binom{n}{m}$.
12. Stimare il tempo richiesto per convertire un intero a k bit nella sua rappresentazione in base 10.

13. Esprimere nella notazione "Big-O" le stime dei precedenti esercizi sulle operazioni bit.

14. Esprimere nella notazione "Big-O" il numero di operazioni bit necessarie per il prodotto di una matrice $r \times n$ per una matrice $n \times s$, dove i coefficienti delle matrici sono $\leq m$.

15. Dimostrare che per la parte intera (inferiore) $[\alpha]$ di un numero reale α valgono le seguenti:

    (a) se $\alpha > 0$, allora $[\alpha] = \sum_{1 \leq n \leq \alpha} 1$, $n \in \mathbb{N}$;

    (b) se $m \in \mathbb{N}$, $[\alpha + m] = [\alpha] + m$;

    (c) $[\alpha] + [-\alpha] = 0$, oppure -1 a seconda che α sia un intero oppure no;

    (d) $[\alpha + \beta] \geq [\alpha] + [\beta]$;

    (e) per $n \in \mathbb{N}$ si ha $[\frac{[\alpha]}{n}] = [\frac{\alpha}{n}]$;

    (f) se $\alpha > 0, n \in \mathbb{Z}$, allora $[\frac{\alpha}{n}]$ è il numero di interi positivi che non superano α e che sono multipli di n;

    (g) mostrare che, se $[\alpha]$ rappresenta il più grande intero più piccolo di α, invece $[\alpha + \frac{1}{2}]$ rappresenta l'intero più vicino ad α.

16. Se a e b sono numeri irrazionali positivi tali che $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, allora le due successioni di interi $[an]$ e $[bn]$, per $n = 1, 2, \ldots$, rappresentano *tutti* i naturali non nulli *senza ripetizione*.

17. Dimostrare che per ogni intero q e per ogni reale α si ha:

    $$[\alpha] + [\alpha + 1/q] + [\alpha + 2/q] + \ldots + +[\alpha + (q-1)/q] = [q\alpha].$$

    (Suggerimento: sia $\alpha = [\alpha] + \theta$, per $0 \leq \theta < 1$, e si consideri $s = [q\theta] \leq q\theta < s + 1$.)

18. Provare che a e b sono coprimi se e solo se per qualche x, y intero si ha $ax + by = 1$.

19. Se $d = (a, b), a = Ad, b = Bd$, mostrare che A e B sono coprimi.

20. Se $d = (a, b) = ax + by$, mostrare che x e y sono coprimi.

21. Se $(a, b) = 1$ e $(a, c) = 1$, dimostrare che $(a, bc) = 1$. Dimostrare inoltre che $(a^s, b^r) = 1$.

22. Se $(a, b) = 1$, dimostrare che $(a + ub, b) = 1$ per ogni intero u.

23. Se $(a, b) = 1$, dimostrare che $(a + b, a - b) = 2$ oppure 1, a seconda che a e b abbiano la stessa, oppure diversa, parità.

24. Provare che $(ka, kb) = k(a, b)$ per ogni intero $k \neq 0$.

25. Se $d = (a, b) = MCD(a, b)$ ed $m = [a, b] = mcm(a, b)$, dimostrare che $md = ab$. Produrre un esempio in cui, dati tre naturali a, b, c può essere che $(a, b, c)[a, b, c]$ sia minore o uguale ad a, b, c.