ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto

Scheda di esercizi n. 2

1. Mostrare che $\pi(\sqrt{210}) = 6$ ed enumerare i sei primi della lista.

2. Applicare il crivello di Eratostene solo nell'intervallo da 190 a 210 (sono richiesti solo $\pi(\sqrt{210})$ passi), descrivemdo i primi e i primi gemelli di questo intervallo.

3. Modificando leggermente la seconda dimostrazione del teorema dell'esistenza di infiniti primi (quella che usa gli interi della forma $6x-1$), dimostrare che ci sono infiniti primi nella progressione aritmetica $3, 7, 11, 15, \ldots$ degli interi della forma $4x-1$.

4. Mostrare che non ci possono essere triplette di primi, cioè terne formate da tre dispari consecutivi, a eccezione di $(3, 5, 7)$.

5. Se $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ è un polinomio a coefficienti interi, mostrare (usando il teorema del binomiale) che
$$f(ty+k) = yQ + f(k),$$
dove Q è un polinomio in t, y, k a coefficienti interi.

6. Dare una dimostrazine alternativa dell'esercizio precedente, usando l'algoritmo di divisione (euclidea) tra polinomi con y come divisore e R (che non contiene y) come resto; porre quindi $y = 0$ per mostrare che $R = f(k)$.

7. Illustrare l'esercizio precedente per $f(x) = x^2 - 79x + 1601$, mostrando che $Q = t(ty + 2k - 79)$. Per $k = 1, y = f(1), t = 1$, mostrare che $f(1524) = 1523 \cdot 1447$.

8. Dare una dimostrazione alternativa a quella di Euclide sull'infinità dei primi, supponendo che ci siano solo k primi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ e usando l'intero $M = (p_1 p_2 \ldots p_k) + 1$ per arrivare a una contraddizione.

9. Usando le notazioni dell'esercizio precedente, e ponendo $p_i = P_i$ dove P_i denota l'i-simo primo, dimostrare che i $P_{k+1} - 2$ successivi a M sono composti.

10. Assumendo le formula date a lezione per le funzioni $\tau(n)$ (numero dei divisori di n) e $\sigma(n)$ (somma dei divisori di n), dimostrare che se a e b sono coprimi, allora $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ e $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

11. Fare una tabella dei valori di $\sigma(p^a) = \frac{(p^{a+1}-1)}{p-1}$ dove p è primo e $\sigma(p^a) < 100$.

12. Usando l'esercizio precedente, trovare tutte le soluzioni di $\sigma(x) = 72$.

13. Mostrare che $\tau(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato.

14. Usando l'esercizio 8., dimostrare che $\tau(x) = q$ ha infinite soluzioni x per ogni dato intero $q > 1$.

15. Un intero positivo si dice *multiplo-perfetto* se $\sigma(n) = kn$ con k intero, $k \geq 3$. Mostrare che $n = 120$ e $n = 672$ sono multiplo-perfetti. (Cartesio aveva dimostrato che $n = 14.182.439.040$ è multiplo-perfetto).

16. Una coppia di interi positivi A e B si dicono *amichevoli* se $\sigma(A) = A + B = \sigma(B)$. Mostrare che 220 e 284 sono amichevoli.

17. Provare che il prodotto di tutti i divisori di n è dato da $n^{\tau(n)/2}$. Comparare questo risultato con l'esercizio 13.

18. Usando il teorema "nuove funzioni moltiplicative da funzioni moltiplicative note", sviluppare una formula per $\tau_1(n) = \sum \tau(d)$, dove la somma è estesa ai divisori positivi d di n.

19. Sia $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ la fattorizzazione standard di n; si definisca per un fissato intero s la funzione $f(n) = s^k$ per $n > 1$ e $f(1) = 1$. Dimostrare che tale f è moltiplicativa. Sviluppare una formula $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.