

ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 3

1. Trovare il più piccolo intero positivo m tale che l'equazione diofantea $533x + 299y = 10000 + m$ abbia soluzioni intere, e per tale m determinare, se ci sono, quante e quali sono le soluzioni dell'equazione a valori entrambi positivi.
2. Mostrare che $213x + 441y = 10002$ ha soluzioni intere ma, in nessuna di queste, sia x che y sono positive.
3. Ottenere una formula per tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $d = (3713, 1343) = 3713X + 1343Y$.
4. Ricordando il passo (6) della dimostrazione nella ricerca delle terne pitagoriche, che afferma che tutte le soluzioni primitive di $x^2 + y^2 = z^2$, se ve ne sono, hanno la forma $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$, con $(u, v) = 1$ e dove u e v hanno parità opposta, dimostrare che a valori distinti di u e v corrispondono terne pitagoriche distinte.
5. Trovare tutte le terne pitagoriche primitive in cui $x = 60$.
6. Trovare le terne pitagoriche primitive in cui un lato sia pari a 7.
7. Trovare le terne pitagoriche primitive in cui un lato sia pari a 11.
8. Mostrare che è impossibile trovare una terna pitagorica primitiva con un lato pari a T , per T pari ma non multiplo di 4. Mostrare che ogni altro intero T può essere il lato di almeno una terna pitagorica primitiva.
9. Sia $T = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, con $a \geq 0$, $n \geq 0$, dove i p_j sono primi dispari, $a_j \geq 1$ e $2 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$ (quindi per $n = 0$, sarà

$T = 2^a$). Si indichi con $S(T)$ il numero di terne pitagoriche primitive in cui T è un cateto. Dimostrare che $S(T) = 2^{n-1}, 0, 2^n$ a seconda che $a = 0, a = 1, a > 1$. (E. Bahier.)

10. Seguendo il metodo della dimostrazione per la ricerca delle terne pitagoriche primitive, ottenere la soluzione completa dell'equazione diofantea $x^2 + 2y^2 = z^2$, fornendo la dimostrazione dei seguenti passi:
 - (a) Per trovare tutte le soluzioni, è sufficiente trovare le soluzioni primitive, cioè quelle in cui $(x, y, z) = 1$.
 - (b) Le soluzioni primitive sono tali che $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$.
 - (c) Sia x che z devono essere pari, mentre y deve essere dispari. Si ponga $y = 2Y, z + x = 2r, z - x = 2s$.
 - (d) Da $(x, z) = 1$ segue che $(r, s) = 1$.
 - (e) L'equazione diofantea $x^2 + 2y^2 = z^2$ diventa $2Y^2 = rs$.
 - (f) O vale: (I) $r = 2R^2, s = S^2$, con $(2R, S) = 1$; oppure vale: (II) $r = S^2, s = 2R^2$, con $(2R, S) = 1$.
 - (g) Ogni soluzione primitiva deve avere la forma seguente: $x = \pm(2R^2 - S^2), y = 2RS, z = 2R^2 + S^2, (2R, S) = 1$.
 - (h) Ogni terna descritta al punto (g) è una soluzione dell'equazione di partenza.
 - (i) Ogni terna descritta al punto (g) è una soluzione primitiva.
11. Mostrare per $n \geq 3$, usando la formula per $\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$, che $\phi(n)$ è pari e che $2^r | \phi(n)$ se ci sono r fattori primi dispari distinti che dividono n .
12. Calcolare $\phi(p^\alpha)$ in maniera diretta senza usare la formula precedente.
13. Dimostrare che la somma di tutti gli interi positivi minori di n coprimi con n è $n\phi(n)/2$ per $n > 2$.
14. Usando la formula dell'esercizio 11., dimostrare che ϕ è una funzione aritmetica moltiplicativa.
15. Si costruisca una tavola a valori $A^k(A - 1)$, per a primo, $k \geq 1$. Con questa tavola, si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $\phi(n) = 60$.