

ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 4

1. Dimostrare che il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 6; di quattro interi consecutivi per 24.
2. Dimostrare che se $c \neq 0$ e $ac|bc$ allora $a|b$.
3. Dimostrare che $4 \nmid (n^2 + 2)$ per ogni intero n .
4. Dimostrare che $n^2 - n$ è divisibile per 2; $n^3 - n$ è divisibile per 6; $n^5 - n$ è divisibile per 30.
5. Mostrare che se x e y sono dispari, allora $x^2 + y^2$ è pari ma non divisibile per 4.
6. Mostrare che il quadrato di ogni intero è della forma $3k$ o $3k + 1$ ma non della forma $3k + 2$.
7. Se $a, b > 2$ sono interi positivi, dimostrare che $2^a + 1$ non è divisibile per $2^b - 1$.
8. Se $(a, 4) = 2$ e $(b, 4) = 2$, allora vale $(a + b, 4) = 4$
9. Siano dati interi $s, g > 0$. Provare che esistono x, y che soddisfano $x + y = s$ e $(x, y) = g$ se e solo se $g|s$.
10. Mostrare che il successivo del fattoriale e il successivo del fattoriale successivo sono coprimi, ovvero che $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$
11. Dimostrare che un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è divisibile per 2; è divisibile per 4 se le sue ultima due cifre sono divisibili per 4; è divisibile per 8 se le sue ultima tre cifre sono divisibili per 8. (Si usi l'espansione in base 10 del numero.)

12. Mostrare che ogni intero positivo della forma $3k + 2$ ha un fattore primo della stessa forma; si dimostri la stessa cosa per gli interi della forma $4k + 3$ e $6k + 5$.
13. Si provi che 5 è il solo numero primo ad apparire in due diverse coppie di primi gemelli. Si provi inoltre che c'è una corrispondenza biunivoca tra primi gemelli e numeri n tali che $n^2 - 1$ ha esattamente quattro divisori positivi.
14. Mostrare che ci sono infiniti primi della forma $4n + 3$ e della forma $6n + 5$.
15. Dimostrare che un intero dispari $n > 1$ è primo se e solo se non è esprimibile come somma di tre o più interi positivi consecutivi.