ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 5

1. Mostrare che il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 504 se il numero intermedio è un cubo.
2. Quali sono le ultime due cifre decimali di 3^{400} ?
3. Mostrare che se p è un numero primo allora per $0 \leq k \leq p-1$ vale $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$.
4. Mostrare che se p è primo allora $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ per $1 \leq k \leq p-1$.
5. Se p è un primo diverso da 2 e da 5, mostrare che p divide infiniti numeri tra 9; 99; 999; 9999; ...
Se p è un primo diverso da 2 e da 5, mostrare che p divide infiniti numeri tra 1; 11; 111; 1111; ...
6. Trovare le soluzioni delle equazioni: (a) $64x \equiv 83 \pmod{105}$;
(b) $589x \equiv 209 \pmod{817}$; (c) $49x \equiv 5000 \pmod{999}$.
7. Mostrare che se p è primo, allora la congruenza $x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ha solo le due soluzioni $x \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ e $x \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$.
8. Risolvere il sistema di congruenze:
 $x \equiv 1 \pmod{4}$, $x \equiv 0 \pmod{3}$, $x \equiv 5 \pmod{7}$.
9. Determinare se le congruenze $5x \equiv 1 \pmod{6}$ e $4x \equiv 13 \pmod{15}$ hanno una soluzione comune e, nel caso, determinarle se esistono.
10. Calcolare il numero di interi positivi ≤ 3600 coprimi con 3600.
11. Risolvere la congruenza $x^3 + 4x + 8 \equiv 0 \pmod{15}$.

12. Trovare il più piccolo n tale che $\phi(x) = n$ non ha soluzione; ha esattamente una soluzione; esattamente tre soluzioni; esattamente quattro soluzioni.
13. Sia $(a, b) = 1$ e $c > 0$. Mostrare che esiste un intero x tale che $(a + bx, c) = 1$.
14. Risolvere la congruenza polinomiale $x^5 + x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{3^4}$.
15. Risolvere la congruenza polinomiale $x^3 + x + 57 \equiv 0 \pmod{5^3}$.
16. Risolvere la congruenza polinomiale $x^2 + 5x + 24 \equiv 0 \pmod{36}$.
17. Ridurre le seguenti congruenze a congruenze equivalenti di grado ≤ 6 :
- (a) $x^{11} + x^8 + 5 \equiv 0 \pmod{7}$.
- (b) $x^{20} + x^{13} + x^7 + x \equiv 2 \pmod{7}$.
- (c) $x^{15} - x^{10} + 4x - 3 \equiv 0 \pmod{7}$.
18. Mostrare che la congruenza $x^{14} + 12x^2 \equiv 0 \pmod{13}$ e quindi è la congruenza identica.
19. Si scriva $1/1 + 1/2 + \dots + 1/(p-1) = a/b$ con $(a, b) = 1$. Dimostrare che $p^2 | a$ se $p \geq 5$.
20. Mostrare che, se $p \geq 5$ ed m è un intero positivo, allora

$$\binom{mp-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}.$$

21. Illustrare la "riduzione da modulo m ai moduli $p_i^{a_i}$ " risolvendo:
 (a) $19x \equiv 1 \pmod{136}$; (b) $19x \equiv 1 \pmod{231}$.
22. Illustrare la "riduzione da modulo p^s al modulo p^{s-1} " risolvendo:
 (a) $37x \equiv 18 \pmod{121}$; (b) $37x \equiv 18 \pmod{343}$.
23. (a) Tramite sostituzione dei sistemi di residui completi minimi in modulo $(\text{mod } 5)$ e $(\text{mod } 7)$, trovare tutte le soluzioni di

$$x^3 + 3x^2 + 31x + 23 \equiv 0.$$

- (b) Usando le soluzioni del punto precedente e la "riduzione da modulo m ai moduli $p_i^{a_i}$ ", trovare tutte le soluzioni della stessa congruenza (mod 35).
 - (c) Discutere il numero di soluzioni (mod 5), (mod 7), (mod 35) come illustrazione del teorema di Lagrange sul numero di soluzioni di una congruenza.
24. Descrivere le soluzioni della congruenza $x^3+64x^2+x+30 \equiv 0 \pmod{216}$.
25. Descrivere le soluzioni della congruenza $x^3 \equiv 13 \pmod{490}$.
26. (a) Risolvere $x^3 + 3x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ (due soluzioni).
- (b) Applicare a "riduzione da modulo m ai moduli $p_i^{a_i}$ ", per risolvere la stessa congruenza (mod 25) (sei soluzioni).
 - (c) Applicare la stessa riduzione un'altra volta per risolvere la stessa congruenza (mod 125) (undici soluzioni).