ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto

Scheda di esercizi n. 6

1. Sia$(a, m) = 1$: se a ha ordine e (mod m), mostrare che a^s ha ordine E con $e = E \cdot (e, s)$.

2. Mostrare che se una classe ha ordine $\phi(m)$ (mod m), allora ci sono $\phi(\phi(m))$ classi dello stesso ordine.

3. Trovare 8 classi resto di ordine 20 (mod 25).

4. Provare che 2 non è una radice primitiva (mod 17).

5. Provare che 3 è una radice primitiva (mod 17) ed elencare tutte le altre.

6. Trovare una radice primitiva (mod 19) e classificare tutte le altri classi (mod 19) resto incongrue a 0 a seconda del loro ordine.

7. Usare le tavole del libro Theory of Numbers di Stewart a pag 136 (capitolo 20) per risolvere le congruenze seguenti (mod 29):

$$x \equiv (12)(18), \quad x \equiv (21)(25), \quad 3x \equiv 7, \quad 17x \equiv 23, \quad 8x \equiv 1,$$

$$x \equiv (15)^{10}, \quad x \equiv (33)^{33} \equiv 4^5, \quad x^2 \equiv 16, \quad x^2 \equiv 18,$$
$$x^3 \equiv 7, \quad x^3 \equiv 18, \quad x^5 \equiv 22, \quad x^6 \equiv 5, \quad x^6 = 6.$$

8. Costruire una tavola di indici (mod 29) usando 3 come radice primitiva.

9. Trovare una radice primitiva (mod 23).

10. Sia p un primo dispari. Provare che a ha ordine 2 (mod p) se e solo se $a \equiv -1$ (mod p).

11. Se p è un primo dispari, quante sono le soluzioni di $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$? e di $x^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$?

12. Tra i 101 interi in un insieme completo di residui $\pmod{101^2}$ che sono $\equiv 2 \pmod{101}$, quale non è una radice primitiva $\pmod{101^2}$?

13. Sia p un numero primo dispari e a una radice primitiva $\pmod{p}$, provare che $-a$ è una radice primitiva oppure no a seconda che valga $p \equiv 1 \pmod{4}$ oppure $p \equiv 3 \pmod{4}$.

14. Provare che se a ha ordine 3 modulo un primo p, allora $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$, e che $1 + a$ ha ordine 6.