# ISTITUZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

Claudia Malvenuto

Scheda di esercizi n. 8

1. Dimostrare che la caratteristica di un dominio di integrità (quindi di un campo) se non è 0, è un numero primo.

2. Dimostrare che se un campo è finito allora ha caratteristica non nulla.

3. Quanto vale la caratteristica dei seguenti anellI?
$$3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3.$$

4. Se $K \supset F$ è un'estensione di $F$ e $a \in K$, provare che per l'estensione semplice $F(a)$ si ha:
$$F(a) = \left\{ \frac{\alpha_0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_s a^s}{\beta_0 + \beta_1 a + \ldots + \beta_t a^t} \mid \alpha_i, \beta_j \in F, s, t \in \mathbb{N}, \beta_0 + \beta_1 a + \ldots + \beta_t a^t \neq 0 \right\}.$$

5. Dimostrare che l'applicazione $\Psi_a : F[X] \to K$ definita da $\Psi_a(f) = f(a)$ è un omomorfismo di domini di integrità; che $Im\Psi_a = F[a]$, e che $Ker(\Psi_a) = \{0\}$ se e solo se $a$ è trascendente.

6. Dimostrare che data una estensione di campi $K \supset F$, gli elementi di $K$ algebrici su $F$ formano un sottocampo di $K$.

7. Mostrare che il polinomio $x^2 - 5$ è irriducibile sul campo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Calcolare quindi il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \supset \mathbb{Q}$, fornendo poi esplicitamente una base dell'estensione.

8. Calcolare l'inverso di $2 - \sqrt{3}$ e di $7 + \sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

9. Calcolare $0111/1111, (1010)^{-1}, \sqrt{0011} \in GF(16)$.

10. Mostrare in modo diretto che per $p$ primo $\mathbb{Z}_p$ è l'unico campo finito di cardinalità $p$ a meno di isomorfismo.