COMBINATORIA

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 11

1. Un *albero radicato* è un albero in cui c'è un vertice che è specificato come *radice*.Una foresta è un grafo in cui ogni componente connessa è un albero. Le foreste di alberi radicati sono foresti in cui ogni componente connessa è un albero radicato. Dimostrare le seguenti affermazioni

   (a) Poiché ci sono n^{n-2} alberi su $[n]$, segue che ci sono n^{n-1} alberi radicati su $[n]$. Usare la corrispondenza di Prüfer per trovare una biiezione dall'insieme $[n]^{n-1}$ all'insieme degli alberi radicati su $[n]$ con la proprietà che un vertice di un albero radicato con i figli appare i volte nella sequenza corrispondente.

   (b) Mostrare che il numero di foreste composte da j alberi radicati su $[n]$ è $\binom{n-1}{j-1}n^{n-j}$.

   (c) Per $1 \leq k \leq n$, mostrare che il numero di foreste sull'insieme di vertici $[n]$ che consistono di k alberi, in cui i vertici $1, 2, \ldots, k$ siano in alberi diversi, è kn^{n-k-1}.

2. Un *albero colorato per archi* è un albero in cui gli archi sono colorati in modo che archi adiacenti abbiano colori diversi. Mostrare che il numero di archi colorati per archi su $[n]$ in cui i colori siano scelti tra $1, 2, \ldots, \lambda$ è

$$\lambda(n\lambda - n)(n\lambda - n - 1)\cdots(n\lambda - 2n + 3) = \lambda\binom{n\lambda - n}{n-2}(n-2)!$$

3. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Mostrare che l'intersezione di un ideale $I \subseteq P$ con un ideale duale $J \subseteq P$ è un convesso di P.

4. Mostrare che $\underline{n}$ (catena a n elementi), B_n (ordine dei sottoinsiemi di $[n]$ per inclusione), D_n (divisori di n con ordinamento della divisibilità) e Π_n (partizioni insiemistiche di $[n]$ con la relazione d'ordine del raffinamento di partizioni) sono reticoli, e che i primi tre sono reticoli distributivi, mentre Π_n non è distributivo.

5. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato graduato di rango n; sia $p_i = |\{x \in P : rk(x) = i\}|$ il numero di elementi di rango i di P. Definiamo la *funzione generatrice per ranghi* di P come

$$F(P, x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i.$$

Studiare $F(P,x)$ per $P = \underline{n}, B_n, D_n, \Pi_n$.

6. Dimostrare che per ogni insieme ordinato $(P, \leq)$, l'insieme $J(P)$ degli ideali di P, ordinato un rispetto all'inclusione, è un reticolo distributivo.

7. Costruire $J(P)$ il reticolo distributivo degli ideali di un insieme ordinato $(P, \leq)$ rispetto all'inclusione, scegliendo qualche opportuno P su 3, 4 o 5 elementi.

8. Dato $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, $Int(P) = \{[x,y] : x \leq y\}$ l'insieme degli intervalli di P e $I(P) = \{f : Int(P) \to K\}$ l'algebra di incidenza di P. Detta $\zeta \in I(P)$ la *funzione caratteristica* di P, che vale $\zeta(x,y) = 1$ per ogni $x, y \in P$ con $x \leq y$, dimostrare che

   (a) $\zeta^2(x,y)$ è il numero di elementi dell'intervallo $[x,y]$;

   (b) $\zeta^n(x,y)$ è il numero di multicatene (catene con ripetizioni) lunghe n dell'intervallo $[x,y]$;

   (c) sia $\mathbf{1}(x,y) = 1$ per $x = y$ e $\mathbf{1}(x,y) = 0$ per $x \neq y$, allora $(\zeta - \mathbf{1})^n(x,y)$ è il numero di catene lunghe n dell'intervallo $[x,y]$;

   (d) usando il fatto che provare che $(\mathbf{2} - \zeta)(x,y) = 1$ per per $x = y$ e $(\mathbf{2} - \zeta)(x,y) = -1$ per $x \neq y$, provare che la funzione $(\mathbf{2} - \zeta)$ è invertibile in $I(P)$ e che $(\mathbf{2} - \zeta)^{-1})$ è il numero totale di catene da x a y (con $\mathbf{2} = 2 \cdot \mathbf{1}$).

9. Usando la ricorsività, calcolare la funzione di Möbius $\mu_P(x) = \mu_P(\hat{0}, x)$ per ogni elemento x di P, per $P = D_{84}, B_4, \Pi_5, \underline{6}$, dove $\hat{0}$ denota l'elemento minimo di P.

10. Dati $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ due poset, sia $(P \times Q, \leq_{p \times Q})$ il poset *prodotto cartesiano*. Dimostrare che per la funzione di Möbius vale

$$\mu_{P \times Q}((x,y),(x',y')) = \mu_P(x,x') \cdot \mu_Q(y,y').$$

11. Un *segmento* (run) di zeri è una sottosuccessione consecutiva massimale di zeri in una stringa binaria.

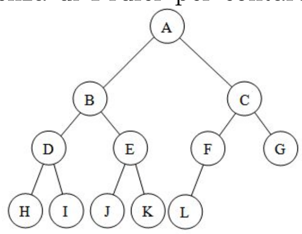
    (a) Mostrare che il numero di parole binarie di lunghezza n con k segmenti di zeri è $\binom{n+1}{2k}$.

    (b) Mostrare che il numero di parole binarie lunghe n con un totale di k occorrenze tra 10 o 01 è $2\binom{n-1}{k}$.

    (c) Mostrare che il numero di parole binarie lunghe n con di k occorrenze di 10 è $\binom{n+1}{2k+1}$.

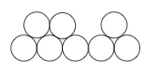
12. Quanti sono i sottoinsiemi $\{a_1 < a_2 < \ldots\}$ di $[n]$ tali che $a_i \equiv i (\text{mod } 2)$ per ogni i? Esprimere la risposta in termini di numeri di Fibonacci.

13. L'n-simo numero di Catalan è dato da $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Un albero binario completo è un albero radicato in cui ogni nodo ha due figli, e tutti i livelli, escluso al più l'ultimo, sono pieni, come in figura. Mostrare che ci sono C_n alberi binari completi su $2n+1$ vertici, usando la corrispondenza di Prüfer per contare una classe appropriata di alberi etichettati.



14. Dimostrare che ognuna delle famiglie di oggetti che seguono è enumerata dai numeri di Catalan C_n. Il modo più semplice è di trovare una biiezione tra questi oggetti e altri di cui si sa già che sono enumerati dai numeri di Catalan. È sufficiente descrivere la biiezione, non è necessario, per questo esercizio (ma si può fare!) dimostrare che l'applicazione sia biiettiva.

    (a) modi di impilare monete uguali nel piano, in cui la riga più in basso consista di n monete cosecutive. Per esempio, per $n = 5$ una di queste pile è mostrata in figura:

    (b) arrangiamenti dei numeri $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ in un rettangolo $2 \times n$, in modo che i numeri siano crescenti sulle righe e sulle colonne;

    (c) sequenze $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ di interi tali che $a_i \leq i$;

    (d) sequenze $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di interi tali che $a_1 = 0$ e $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$;

    (e) configurazioni di n corde non intersecanti che congiungono (a coppie) $2n$ punti presi su una circonferenza;

    (f) permutazioni $a_1 a_2 \ldots a_n$ di $[n]$ per le quali non esistono tre indici $i < j < k$ con $a_j < a_k < a_i$. (Tali permutazioni si chiamano *permutazioni che evitano il motivo* 312.)