MATEMATICA DISCRETA
PRIMA PARTE
(PROVA IN ITINERE)

CLAUDIA MALVENUTO
21 APRILE 2016

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.

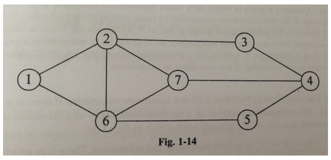
ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/6
2	/6
3	/7
4	/6
5	/7
TOTALE	/ 32

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

1. (6 punti) Un grafo si dice *autocomplementare* se è isomorfo al suo complementare. Dimostrare che il numero dei vertici di un grafo autocomplementare è $4k$ oppure $4k+1$.

   Soluzione Consideriamo un grafo autocomplementare $G = (V(G), E(G))$ con n vertici ed m archi. Poiché G è isomorfo al suo complementare $\overline{G}$, allora anche $\overline{G}$ ha n vertici e m archi. Inoltre $E(G) \cup E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2}$, da cui segue $m + m = \binom{n}{2}$ ovvero $2m = n(n-1)/2$, cioè $4m = n(n-1)$: poiché 2 (o 4) non può dividere sia n che $n-1$, che sono coprimi, segue che $n = 4k$ oppure $n - 1 = 4k$ per qualche k, da cui la tesi.

2. (8 punti) In un grafo $G = (V, E)$ un sottoinsieme di vertici $I \subseteq V$ si dice *indipendente* se nessuna coppia di vertici di I è adiacente. Un indipendente è *massimale* se non è contenuto propriamente in nessun altro indipendente di G. Un sottoinsieme di vertici $D \subseteq V$ si dice dominante se ogni vertice che non sta in D è adiacente ad almeno un vertice in D.

   Nel grafo in figura, trovare: 

   (a) un insieme dominante che non sia indipendente;
   (b) un insieme indipendente che non sia dominante;
   (c) un insieme indipendente che sia anche dominante.

   Dimostrare poi che un insieme I indipendente di un grafo G è dominante se e solo se I è un indipendente massimale.

   Soluzione (a) $\{2, 6, 7\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{1, 4\}$.

   Sia I un indipendente che sia anche dominante, allora si ha:

   $[\forall x \notin I, \exists y \in I : \{x, y\} \in E] \Rightarrow [\forall x \notin I : I \cup \{x\}$ non è indipendente$] \Rightarrow [I$massimale$]$.

   Se I è un indipendente di G che non è dominante, allora:

   $[\exists x \notin I, \forall y \in I : \{x, y\} \notin E] \Rightarrow [\exists x \notin I : I \cup \{x\}$ è indipendente$] \Rightarrow [I$ non è massimale$]$.

3. (7 punti) Dimostrare la seguente identità

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

non utilizzando l'induzione matematica, ma una delle interpretazioni combinatorie del coefficiente binomiale.

Soluzione Sia U l'insieme delle stringhe binarie di lunghezza $n+k+1$ che hanno k occorrenze di 1: esso ha cardinalità pari al coefficiente binomiale $\binom{n+k+1}{k}$.

Possiamo così ripartire U in sottoinsiemi secondo la prima occorrenza di uno zero nella stringa. Più precisamente, sia

$$U_i := \{(x_1, \ldots, x_{n+k+1}) : x_1, x_2, x_{i-1} = 1, x_i = 0\}, \quad i = 1, \ldots k+1;$$

ogni U_i contiene le stringhe che hanno come posizione della prima occorrenza di 0 l'indice i, e quindi hanno come prefisso la stringa $(x_1, \ldots, x_i) = (1, 1, \ldots, 1, 0)$. Si osserva che in U_i ci sono tante stringhe quante stringhe binarie lunghe $n+k+1-i$ che hanno $k-(i-1) = k-i+1$ occorrenze di 1, cioè $\binom{n+k-i+1}{k-i+1}$. Poiché gli U_i sono a due a due disgiunti si ottiene:

$$\binom{n+k+1}{k} = |U| = \sum_{i=1}^{k+1} |U_i| = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{n+k-i+1}{k-i+1},$$

che è esattamente la somma dell'enunciato.

4. (6 punti) Trovare il numero di modi di far sedere n uomini ed n donne intorno a una tavola rotonda in modo tale che tra due donne ci sia sempre un uomo seduto in mezzo.

   Soluzione Abbiamo visto in precedenza che il numero di modi diversi di far sedere n donne intorno a una tavola rotonda è $(n-1)!$. Adesso si ponga una sedia in mezzo tra due donne, per ogni coppia di donne, per un totale di n sedie aggiunte; queste sedie possono essere occupate dagli uomini in $n!$ modi diversi, e ognuna di queste sistemazioni è una sistemazione valida. Perciò il numero totale di modi in cui far accomodare le persone presenti con l'imposizione data è $(n-1)! \cdot n!$

5. (7 punti) Un robot domestico deve percorrere una griglia quadrata a partire dal punto $(0;0)$ e arrivando al punto $(8;8)$ con un totale di 16 passi unitari. Deve passare dal punto $(2;3)$ e deve evitare il punto $(6;5)$. Quanti cammini diversi può prendere?

   Soluzione Per andare da $(0;0)$ a $(8;8)$ in 16 passi, assumendo che il robot può camminare solo orizzontalmente e verticalmente sulla griglia, il cammino necessariamente si compone solo di passi verso l'alto $(\uparrow)$ o di passi a destra $(\rightarrow)$: quindi dobbiamo contare i cammini tramite il coefficiente binomiale $\binom{n+m}{n}$, dove n ed m sono rispettivamente i numeri di passi a destra e di passi verso l'alto (quindi $n+m$ corrisponde alla lunghezza totale di passi di un cammino). Adesso, per andare da $(0;0)$ a $(2;3)$ il cammino ha un totale di 5 passi unitari, di cui due a destra, per un totale di $\binom{5}{2} = 10$ cammini possibili. Il cammino può proseguire dal punto $(2;3)$ della griglia in $\binom{16-5}{8-2} = \binom{11}{6}$ modi. Tra questi ultimi però ce ne sono alcuni che passano per $(6;5)$, esattamente $\binom{11-5}{6-2}\binom{5}{2}$ (infatti tra i 6 passi rimasti da fare in totale partendo da $(2;3)$ e giungendo a $(6;5)$, quattro vanno a destra; e dei 5 passi totali che portano da $(6;5)$ a $(8;8)$, due vanno a destra. Numericamente, il totale è:

$$\binom{5}{2}\left(\binom{11}{6} - \binom{6}{4}\binom{5}{2}\right) = 10(462 - 15 \times 10) = 3120.$$

6. (Facoltativo) Un albero radicato è un albero in cui uno dei vertici è specificato come radice. Una foresta è un grafo in cui ogni componente è un albero. Le foreste di alberi radicati sono definite in modo consequenziale. Provare che il numero di foreste formate da j di alberi radicati di vertici $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ è $\binom{n-1}{j-1} n^{n-j}$.

   Soluzione Da produrre come esercizio.