

COMBINATORIA

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 4

1. Dimostrare che

$$\sum_{(k_1, \dots, k_r)} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} = r^n.$$

2. Dimostrare che

$$\sum_{(k_1, \dots, k_r)} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} \cdot (-1)^{k_2+k_4+k_6+\dots} = \frac{1 - (-1)^r}{2}.$$

3. Quanti diversi anagrammi ammettono le parole che seguono? (Si ricordi che un anagramma di una parola è una parola composta dalle stesse lettere: ad esempio, **ATTORE** è un anagramma di **TEATRO**. Qui non si richiede che le parole anagrammate abbiano senso compiuto.)

- (a) **COMPUTER**;
- (b) **MAMMA**;
- (c) **ABRACADABRA**.

4. Giochi

- (a) Nel “SuperEnalotto” bisogna pronosticare sei numeri distinti compresi tra 1 e 90. Quante sono le possibili “sestine”?
- (b) Nel gioco del bridge, all’inizio di una partita si distribuiscono le 52 carte tra 4 giocatori, 13 carte per uno. Fissati 4 giocatori, in quanti modi diversi è possibile distribuire loro le carte?
- (c) Si calcoli quante sono le posizioni possibili dopo quattro mosse (due per giocatore) in una partita di filetto (o “zeri e croci”). (Ognuno dei due giocatori, al suo turno, mette il proprio segno su una delle nove caselle.)

5. Qual è il coefficiente di a^3bcd^2 in $(a + b + c + d)^7$? E in $(2a - b + c - 3d)^7$?

6. Quanti sono i numeri pari, a 3 cifre, senza ripetizioni di cifre?

7. Un *palindromo* è una successione finita di caratteri che si legge allo stesso modo da destra verso sinistra o da sinistra verso destra. Per esempio: “Era gennaio, vedevo il Giglio ... Il Giglio vede voi annegare” (M. Buratti, da Il Sole 24 Ore). Trovare il numero dei numeri decimali palindromi di 7 e 8 cifre, con la restrizione che nessuna cifra appaia più di una volta.
8. In un *palindromo binario*, la prima cifra deve essere 1 e ogni cifra successiva può essere 0 oppure 1. Contare i palindromi binari di lunghezza n .
9. Calcolare il numero dei divisori propri di 441000. In generale, contare il numero dei divisori propri di un intero N la cui fattorizzazione in primi sia $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$.
10. Sia $X = \{0, 1\}^n$ l'insieme delle stringhe binarie di lunghezza n . Una *funzione di switch* (o funzione booleana o semplicemente switch) di n variabili è una funzione da X in $Y = \{0, 1\}$. Calcolare il numero di switch di n variabili. Uno switch f è *autoduale* se i valori di f non cambiano su ogni elemento del dominio in cui le cifre 0 e 1 sono interscambiate. Per esempio per $n = 6$, se f è uno switch autoduale, allora $f(101101) = f(010010)$. Elencare tutti gli switch autoduali di 2 variabili. Trovare infine il numero di switch autoduali di n variabili.
11. Una insieme consiste di n_i oggetti identici di tipo i , con $i = 1, 2, \dots, k$. Trovare il numero di modi di selezionare almeno un oggetto da ogni insieme. (Cfr. esercizio 9.)
12. Un *bit* è 0 oppure 1; un *byte* è una successione di 8 bit. Calcolare:
 - (a) il numero di byte;
 - (b) il numero di byte che iniziano con 11 e finiscono con 11;
 - (c) il numero di byte che iniziano con 11 e non finiscono con 11;
 - (d) il numero di byte che iniziano o finiscono con 11.
13. Contare il numero di sequenze binarie lunghe n con un numero pari di cifre uguali a 1.