COMBINATORIA

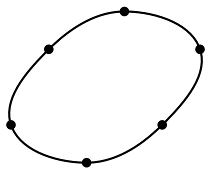
Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 6

1. Contare quanti sono i sottografi distinti di K_n, il grafo completo su n vertici, isomorfi al grafo dato da ognuna delle seguenti figure:

   (a) Cammino su n vertici:

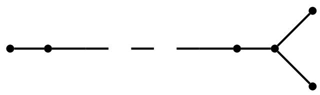
   (b) Cammino su k vertici, con $k < n$

   (c) Ciclo su n vertici:

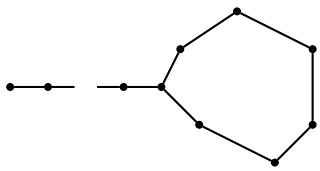
   

   (d) Ciclo su k vertici, con $k < n$

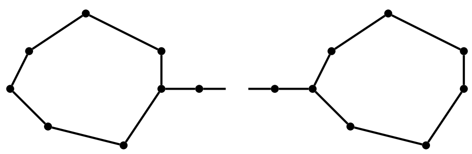
   (e) Forchetta a due rebbi:

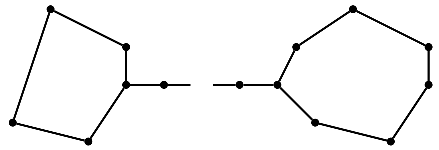
   (f) Palloncino con manico lungo k, e ciclo su $n - k$ vertici:

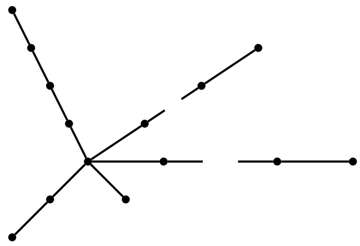
   (g) Occhiali con lenti su k vertici separate da $n - 2k$ vertici:

   (h) Occhiali strambi, con una lente su r vertici, l'altra su s vertici con $r \neq s$ e stanghetta su $n - r - s$ vertici:



(i) "Riccio malconcio" (ogni aculeo del riccio ha lunghezza diversa $k_1, \ldots, k_r$, con $k_i \neq k_j$ se $i \neq j$ e $k_1 + \ldots + k_r + 1 = n$):



2. Si considerino i cammini dal punto di coordinate (a, b) al punto (c, d) nel reticolo $\mathbb{Z}^2$, cioè le successioni di coppie di numeri interi

$$((a, b), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (c, d))$$

in cui ogni coppia differisce dalla precendente solo in una delle due coordinate, e in cui questa differenza sia ogni volta uguale a 1 in valore assoluto (per esempio, per $n = 2$, $((0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (2, 2))$). Fra questi cammini si considerino solo quelli in cui la coordinata che cambia viene incrementata (cioè "ci si muove solo verso nord o verso est").

Si dimostri che esistono esattamente $\binom{2n}{n}$ differenti cammini siffatti da $(0, 0)$ a (n, n). Si usi questo fatto per dimostrare che $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$.

(Suggerimento: ogni cammino incontra la diagonale costituita dai punti $(0, n)$, $(1, n - 1)$, $\ldots$, $(n, 0)$ in esattamente un punto.)

Si provi a pensare agli analoghi cammini in $\mathbb{Z}^d$ per $d > 2$.

3. (a) Quante sono le stringhe di lunghezza n, composte da k simboli 1 e $n-k$ simboli 0, in cui non compaiano 1 consecutivi? Equivalentemente (perché?): quanti sono i sottoinsiemi di k elementi di $[n]$ che non contengono numeri consecutivi?

   (b) Quante sono tutte le stringhe lunghe n, composte di 0 e 1, senza 1 consecutivi?

   (c) Quante sono le n-ple di interi non negativi $x_1, \ldots, x_n$ la cui somma sia k?

4. Sia $F(n)$ il numero di foreste etichettate distinte su n vertici. Assumendo il teorema di Cayley si dimostri che vale la seguente relazione ricorsiva:

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} k^{k-2} F(n-k).$$