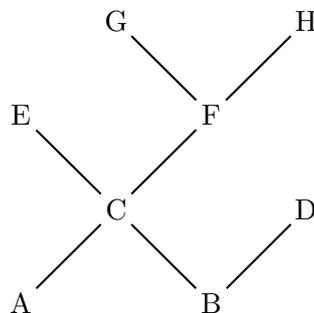


COMBINATORIA

Claudia Malvenuto
Scheda di esercizi n. 9

1. Data una qualsiasi famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di $[n]$, è possibile trovare una sottofamiglia di \mathcal{F} che sia di Sperner?
2. Dato un grafo G , sia $\mathcal{F}(G)$ la famiglia delle clique massimali di G . Provare che $\mathcal{F}(G)$ ha la proprietà di Sperner.
È vero che per ogni famiglia di Sperner \mathcal{F} esiste un grafo G tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$, ovvero che \mathcal{F} sia composta dalle clique massimali di G ?
3. Individuare le catene massimali e le anticatene massimali dell'insieme parzialmente ordinato descritto dal seguente diagramma di Hasse.



4. Dare un esempio di famiglia di sottoinsiemi di $[n]$ che, pur verificando la disuguaglianza LYM, non sia un'anticatena (cioè non sia di Sperner).
5. Una famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di $[n]$ si dice *intersecante* se $\{A, B\} \in \binom{\mathcal{F}}{2} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Dimostrare che per ogni famiglia intersecante \mathcal{F} di sottoinsiemi di $[n]$ si ha $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Esistono famiglie intersecanti di cardinalità massima? È possibile darne una descrizione esaustiva?

6. Si consideri la famiglia \mathcal{R} di sottoinsiemi di $[7]$:

$$\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}.$$

Sia $\mathcal{F} = \{A \subseteq [7] : A \supseteq R \text{ per qualche } R \in \mathcal{R}\}$.

Dimostrare che:

- (a) \mathcal{R} è una famiglia intersecante (nota come *piano di Fano*);
 - (b) \mathcal{F} è una famiglia intersecante;
 - (c) $|\mathcal{F}| = 2^6$ (cioè di cardinalità massima).
7. Dimostrare che nel grafo G , in cui $V(G) = 2^{[n]}$ e in cui $\{A, B\} \in E(G)$ se e solo se $A \subseteq B$ oppure $B \subseteq A$, si ha $\chi(G) = \omega(G)$.