Università di Roma "La Sapienza". Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali.

Istituzioni di Matematiche

Piero D'Ancona e Marco Manetti

Indirizzo (elettronico) degli autori:

Piero D'Ancona:
e-mail: *dancona@mat.uniroma1.it*
URL: *www.mat.uniroma1.it/people/dancona/*

Marco Manetti:
e-mail: *manetti@mat.uniroma1.it*
URL: *www.mat.uniroma1.it/people/manetti/*

Nota per il lettore. Di alcuni esercizi proposti, contrassegnati con il simbolo ⏭, viene riportata la soluzione nel Capitolo 7. La tazzina di caffè ☕ segnala gli esercizi più difficili.

Indice

CAPITOLO 1

Per cominciare

Richiamiamo qualche concetto di base e qualche metodo di calcolo che avrete sicuramente già incontrato nelle scuole superiori; in seguito torneremo su alcune di queste idee e le riesamineremo da un punto di vista piú generale.

1. Numeri interi, razionali e reali

In matematica è necessario scegliere un punto di partenza condiviso da tutti; da qui, con una serie di ragionamenti logici, si ottengono conseguenze sempre piú generali che ci permettono di risolvere problemi sempre piú complicati.
Il nostro punto di partenza sono i *numeri naturali*:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots .$$

I numeri naturali sono cosí basilari che non si può darne una definizione utilizzando oggetti ancora piú semplici (oggetti piú semplici non ce ne sono...). Chiameremo *l'insieme dei numeri naturali* la collezione formata da questi numeri; la notazione che si usa è la seguente:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Tutte le volte che abbiamo una collezione di oggetti diremo che abbiamo un *insieme*, i singoli oggetti si dicono gli *elementi* dell'insieme, e si dice che essi *appartengono* all'insieme. Se a è un elemento dell'insieme A si scrive anche $a \in A$ (e se non appartiene, si scrive $a \notin A$), e si legge: *a appartiene* ad A, o anche: *A contiene a*. Qualche volta si mette nella collezione anche lo zero; per distinguere useremo la notazione

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Notiamo che gli elementi dell'insieme $\mathbb{N}$ stanno anche nell'insieme $\mathbb{N}_0$ (c'è solo un elemento in piú). Quando tutti gli elementi di un insieme A sono anche elementi dell'insieme B scriveremo $A \subseteq B$ o anche $A \subset B$ e diremo che *A è un sottoinsieme di B*. Ad esempio abbiamo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0$.
Un altro insieme che avete già incontrato è quello dei *numeri interi*: per ottenerlo basta aggiungere ad $\mathbb{N}$ lo zero e tutti gli interi negativi. Useremo il simbolo

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Quindi abbiamo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$. Un modo equivalente di esprimere la stessa cosa è

$$n \in \mathbb{N} \implies n \in \mathbb{N}_0 \implies n \in \mathbb{Z},$$

dove il simbolo $\implies$ significa *implica*. La formula $A \implies B$ (che si legge A implica B) è un modo abbreviato per dire che se A è vero, allora è vero anche B. Per esigenze grafiche scriveremo talvolta $B \impliedby A$ con lo stesso significato di $A \implies B$.

Ora facciamo un salto di qualità: sappiamo che dati due numeri interi p e q, positivi o negativi, possiamo considerare la frazione $\frac{p}{q}$, se il denominatore q è diverso da zero (in simboli: se $q \neq 0$). Chiameremo l'insieme di tutte le frazioni *insieme di numeri razionali* $\mathbb{Q}$. Se vogliamo usare la notazione precedente anche per $\mathbb{Q}$ dobbiamo modificarla un po'. Vogliamo scrivere in una sola formula che $\mathbb{Q}$ è l'insieme di tutti i numeri x tali che x è una frazione di numeri interi relativi, con il denominatore diverso da zero:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \colon x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

(e la formula si legge proprio cosí: *l'insieme di tutti gli x tali che x è uguale a p/q* eccetera). Naturalmente se p è divisibile per q riotteniamo un numero intero; quindi $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Vi ricorderete sicuramente che le frazioni si possono esprimere come numeri decimali, con una *parte intera* e una *parte decimale*:

$$\frac{1}{3} = 0,333333\ldots, \qquad \frac{13}{7} = 1,857142857142\ldots \qquad \frac{-28}{70} = -0,40000\ldots.$$

Anzi, quando dividiamo due numeri interi, lo sviluppo decimale è molto particolare: in certi casi, da un certo punto in poi otteniamo una sequenza di zeri (sviluppo decimale *finito*) e allora non scriviamo gli zeri:

$$\frac{-28}{70} = -0,40000\ldots = -0,4;$$

in altri casi, lo sviluppo decimale non si ferma, però c'è un gruppo di cifre che ritorna sempre uguale, in modo periodico:

$$\frac{1338}{9990} = 0,1339339339\ldots = 0,1\overline{339}.$$

Per indicare che un gruppo di cifre si ripete si disegna una linea sul primo gruppo.

Nessuno ci vieta di considerare dei numeri ancora piú generali, il cui sviluppo decimale non è periodico:

$$-35,785436568954356098700765 4\ldots.$$

Un numero decimale "qualunque" si chiama un *numero reale*, e l'insieme di tutti i numeri reali (tutti i possibili sviluppi decimali) si indica con $\mathbb{R}$. Questa definizione è quasi perfetta: l'unico piccolo difetto è che certi sviluppi decimali, in apparenza diversi, danno lo stesso numero. Precisamente si ha:

$$0,999999\ldots = 1$$

e piú in generale, dato uno sviluppo decimale finito, ne otteniamo uno equivalente con lo stesso metodo:

$$65,2583 = 65,258299999\ldots.$$

Comunque questo piccolo difetto non dà nessun problema nella definizione dei numeri reali.

L'insieme $\mathbb{R}$ è ricchissimo di proprietà: anzitutto possiamo eseguire le solite operazioni (somma, prodotto), inoltre dato un numero x possiamo considerare il suo opposto $-x$, e il suo inverso $\frac{1}{x}$ quando $x \neq 0$; quindi possiamo fare la differenza $x - y$ e dividere $\frac{x}{y}$ se il denominatore non si annulla.

Un'altra proprietà importante è che l'insieme $\mathbb{R}$ è *ordinato*. Questo vuol dire che dati due numeri reali x e y possiamo sempre stabilire quale dei due è piú grande:

$$\text{si deve avere } x \leq y \text{ oppure } x \geq y.$$

L'unico caso in cui valgono tutte e due è quando $x = y$. Attenzione: possiamo dire che $x \leq y$ (x è minore o uguale ad y) *sia* quando x è piú piccolo di y, *sia* quando $x = y$. Per esempio, è vero che $1 \leq 3$ e che $2 \leq 2$. Se vogliamo escludere l'uguaglianza usiamo il simbolo $x < y$ (o $x > y$) che si chiama *disuguaglianza stretta*.

Dato che i numeri reali sono ordinati, possiamo metterli tutti "in fila": il modo piú semplice di visualizzare $\mathbb{R}$ è pensare ad una retta:

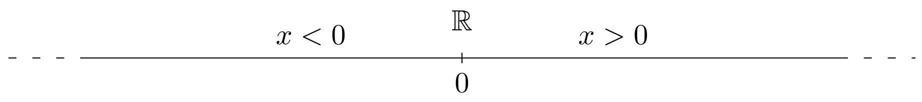


Figura 1.1.

Dentro questa retta, che si chiama la *retta reale*, ritroviamo tutti gli insiemi precedenti, infatti $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Disegnare gli interi è facile:

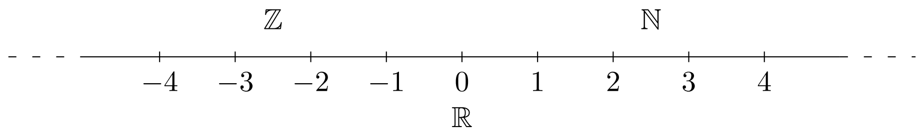


Figura 1.2.

ma se vogliamo disegnare $\mathbb{Q}$ c'è un problema: i numeri razionali non sono separati gli uni dagli altri, ma si "addensano" dappertutto. Precisamente, comunque scegliamo due numeri reali x e y, anche molto vicini, in mezzo a loro possiamo trovare infiniti numeri razionali.

Dati due numeri a e b, con $a < b$, possiamo considerare l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra a e b; questo si chiama un *intervallo* di numeri reali, e a, b si chiamano gli *estremi* dell'intervallo. In certi casi è utile mettere nell'insieme anche i due estremi, in altri casi no; in totale abbiamo quattro possibilità: se consideriamo tutti e due gli estremi, abbiamo

$$\text{l'}\textit{intervallo chiuso } [a, b] = \{x \colon a \leq x \leq b\};$$

se non consideriamo nessuno degli estremi, abbiamo

$$\text{l'}\textit{intervallo aperto }]a, b[= \{x \colon a < x < b\};$$

e se consideriamo uno solo degli estremi, abbiamo gli intervalli semiaperti (detti anche semichiusi)

$$]a, b] = \{x \colon a < x \leq b\} \qquad \text{e} \qquad [a, b[= \{x \colon a \leq x < b\}.$$

Che succede se $a = b$? L'intervallo chiuso $[a, a]$ contiene soltanto il punto a; l'insieme che contiene soltanto il punto a si indica anche con $\{a\}$. Invece l'intervallo aperto $]a, a[$ non contiene nessun punto, perchè nessun x può verificare $a < x < a$; quindi si tratta di un insieme *vuoto*, che spesso si indica anche con $\emptyset$.

È facilissimo visualizzare questi insiemi sulla retta reale: basta considerare il segmento di estremi a e b. Per distinguere i vari casi precedenti, disegneremo un punto pieno se il punto fa parte dell'intervallo, e un punto vuoto se non ne fa parte:

Figura 1.3.

Qualche volta è utile considerare anche intervalli di lunghezza infinita, ossia delle *semirette*: ossia, scelto un punto a, consideriamo tutti gli x che stanno a destra di a, oppure tutti quelli che stanno a sinistra. Per indicare questi intervalli infiniti si usa il simbolo di infinito ∞, e precisamente si scrive:

$$[a, +\infty[= \{x \colon x \geq a\} \qquad]a, +\infty[= \{x \colon x > a\}$$

per le semirette a destra di a (a incluso o escluso), e

$$]-\infty, a] = \{x \colon x \leq a\} \qquad]-\infty, a[= \{x \colon x < a\}$$

per le semirette a sinistra di a.

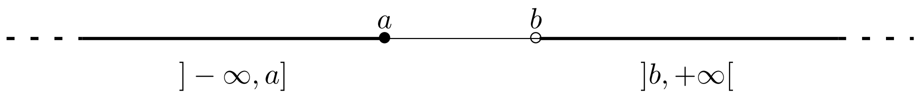


Figura 1.4.

Con gli insiemi che abbiamo definito possiamo fare delle *operazioni*. Le principali sono due: *l'unione* e *l'intersezione*. Fare l'*unione* di due insiemi vuol dire mettere insieme tutti i punti che stanno sia nel primo, sia nel secondo. Per esempio, l'unione degli intervalli $[1, 4]$ e $[3, 8]$ è tutto l'intervallo $[1, 8]$; l'unione degli intervalli $]-1, 2[$ e $]-3, 7]$ è l'intervallo $]-3, 7]$; l'unione degli intervalli $[0, 1]$ e $[5, 6]$ non è un intervallo ma è un insieme fatto di due pezzi separati. L'unione di due insiemi si indica con $\cup$:

$$]0, 6[\cup]1, 9] =]0, 9].$$

L'unione di due insiemi contiene tutti e due gli insiemi di partenza.

La seconda operazione è l'intersezione. Fare l'*intersezione* di due insiemi vuol dire considerare solo i punti in comune, cioè quelli che stanno sia nel primo che nel

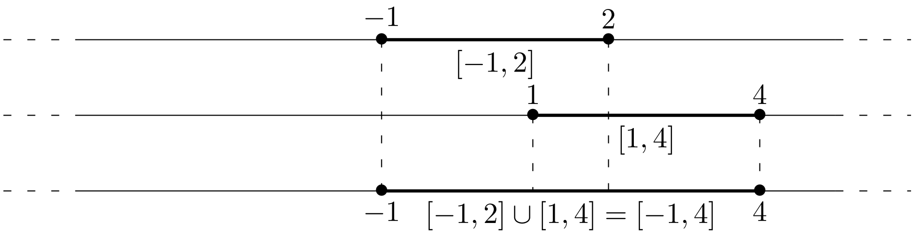


FIGURA 1.5.

secondo. Se stanno solo in uno dei due ma non nell'altro, li scartiamo. L'intersezione di due insiemi si indica con $\cap$. Ad esempio,

$$[1, 3] \cap [2, 7] = [2, 3] \qquad\qquad [3, +\infty[\ \cap \ ] - \infty, 5[= [3, 5[.$$

Chiaramente l'intersezione di due insiemi è contenuta in tutti e due gli insiemi.

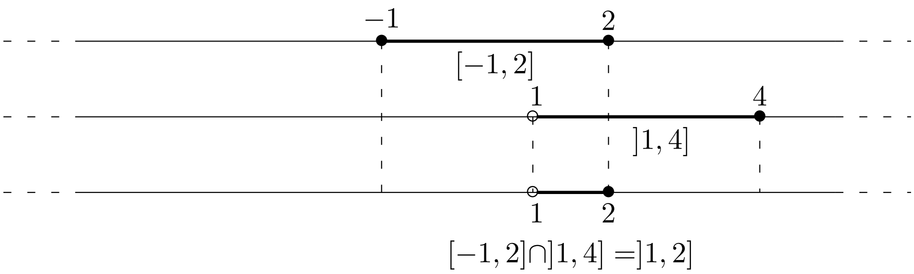


FIGURA 1.6.

Esercizi.

Esercizio 1.1 (▶▶|). Le seguenti unioni e intersezioni di intervalli si possono scrivere in modo piú semplice o no?

$$[1, 10] \cap]4, 12]; \qquad] - 2, -1[\cup [0, 5]; \qquad [1, 2] \cup]3, 4[\, .$$

2. Pratica con i numeri: proporzioni e percentuali

Le proporzioni e le percentuali sono concetti molto facili ma che si incontrano contiunamente, non solo in tutti gli ambiti scientifici ma anche nella vita quotidiana, quindi è di fondamentale importanza averli ben chiari. Vediamo qualche esempio.

1) Ho un socio in affari e abbiamo deciso di dividerci i guadagni sempre nello stesso modo. Secondo i nostri accordi, a me spetta il 55% (il 55 *per cento*) a lui il 45%. Questo mese abbiamo guadagnato 3200 euro. A quanti euro corrisponde la mia parte?

Il problema è facilissimo da risolvere ma vediamo in dettaglio. Stiamo facendo una semplice proporzione: abbiamo una quantità totale di 3200, che sono tutte le 100 parti, e noi vogliamo solo 55 di quelle parti:

$$3200 : 100 = x : 55 \quad \text{cioè} \quad \frac{3200}{100} = \frac{x}{55}$$

Quindi la risposta è data dai 55/100 di 3200:

$$x = \frac{3200}{100} \times 55 = 1760.$$

Un modo più rapido di ricordare: fare il 55% di 3200 vuol dire fare i 55/100 di 3200, cioè moltiplicare 3200 per $0,55$.

2) Supponiamo che il mio socio sia in difficoltà economica e mi chieda di accontentarmi soltanto di 800 euro per questo mese, nel quale abbiamo guadagnato 3200 euro. Che percentuale ho ricevuto invece del mio 55%? Inoltre il mese successivo va molto bene e guadagnamo ben 5000 euro. Il mio socio mi dice di prendermi la mia parte e in più quello che non avevo preso il mese precedente. Quanti euro ricevo, e che percentuale ho preso sul totale di 5000?

La prima domanda chiede: che percentuale x di 3200 rappresentano 800 euro? ossia

$$3200 : 100 = 800 : x \quad \text{cioè} \quad \frac{3200}{100} = \frac{800}{x}$$

(se 3200 euro sono 100 parti, 800 euro sono x parti) da cui

$$x = 800 \times \frac{100}{3200} = 25$$

e quindi sto prendendo solo il 25% invece del 55%. Un modo più rapido è fare semplicemente il rapporto $800/3200 = 0,25$ che ci dice precisamente che 800 euro sono il 25% di 3200 euro.

Il mese dopo, la mia quota del 55% varrebbe

$$5000 \times \frac{55}{100} = 2750.$$

Inoltre il mese prima ho intascato solo 800 euro invece dei miei 1760, quindi sono in credito di 1760-800=960, e questo mese in totale posso prendere 960+2750=3710 euro. Questa somma, rispetto al totale di 5000 euro, rappresenta una quota del

$$\frac{3710}{5000} \times 100 = 74,2 \text{ per cento}$$

(più semplicemente, $3710/5000 = 0,742$) e quindi sto intascando più del 74 per cento dei guadagni dell'ultimo mese.

3) Un recente sondaggio, svolto su un campione di 4000 persone, chiedeva di indicare varie preferenze riguardo al colore dei gatti. Il 10% del campione non ha voluto prendere parte al sondaggio perché odia i gatti e ama solo i cani. I risultati delle interviste sono stati i seguenti:

- il 15% preferisce gatti neri;
- il 55% preferisce gatti bianchi;
- il 25% preferisce gatti grigi;
- il 5% non sa.

Il giorno dopo, sul Gatto Quotidiano, appare la notizia più di metà degli italiani preferisce i gatti bianchi. La notizia è corretta o si tratta della solita esagerazione giornalistica?

Facciamo i conti: il 10% del campione di 4000 si calcola così:

$$4000 : 100 = x : 10$$

e quindi $x = 400$ persone odiano i gatti; l'intervista è stata fatta solo a 4000-400=3600 persone. Il 55% ha risposto in favore dei mici bianchi: si tratta di

$$\frac{55}{100} \times 3600 = 1980$$

persone, chiaramente meno della metà del campione. Precisamente,

$$\frac{1980}{4000} \times 100 = 49,5$$

quindi solo il 49,5 degli italiani ama i gatti bianchi. L'indomani, grande ilarità sul Resto del Felino.

Esercizi.

Esercizio 1.2. Nell'a.a. 2735/2736 gli iscritti al primo anno del corso di laurea in Scienze applicate ai viaggi intergalattici sono stati 150. Nella prima sessione d'esame del corso di Matematica si sono presentati l'80% degli studenti iscritti e solo il 40% è stato promosso. Nella seconda sessione, si sono presentati tutti quelli che non avevano dato o passato l'esame prima, e ne sono stati promossi il 50%. Calcolare:
(i) la percentuale di promossi sul totale degli iscritti;
(ii) la percentuale dei promossi nella prima sessione sugli iscritti.
(iii) la percentuale dei promossi nella prima sessione sul totale dei promossi.

Esercizio 1.3. La *brillanza* B di un insieme di monumenti è la percentuale di superficie bianca sul totale (ad un certo momento T), e può essere misurata con appositi strumenti; l'*annerimento* è la percentuale restante. L'*indice di annerimento* $N(\Delta T)$ è la quantità di annerimento (ovvero di brillanza persa) in un periodo di tempo ΔT fissato.

In due siti archeologici a Roma e Milano, tra Dicembre 2003 e Febbraio 2005, sono stati raccolti i seguenti dati relativi alla brillanza:

	Roma	Milano
Dic.2003	75	80
Dic.2004	70	50
Feb.2005	68	47

Calcolare:

(i) L'indice di annerimento nei due siti nell'anno 2004;

(ii) l'indice di annerimento nei primi due mesi del 2005.

3. Pratica coi numeri: potenze, logaritmi, notazione scientifica

Le *potenze* sono una notazione utilissima e che si usa continuamente in matematica, ma bisogna fare attenzione. Ricordiamo le regole di base:

- una potenza intera, ad esempio x^7, è solo una notazione abbreviata per il prodotto
$$x^7 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x.$$
Questo vale per tutte le potenze x^n con n intero maggiore o uguale a 1.
- Ovviamente se $n, m \geq 1$ sono interi si ha
$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$
e se $n > m$ (e $x \neq 0$) si ha
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$
E se $n = m$? avremmo
$$1 = x^0$$
e questo suggerisce di definire $x^0 = 1$ per tutti gli x diversi da 0.
E se $n < m$? adesso la potenza $n - m$ diventa negativa, si può fare? ad esempio potremmo prendere $n = 0$, $m \geq 1$, e otteniamo
$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}.$$
Questa sarà la nostra definizione di potenza negativa x^{-m} sempre che x sia diverso da 0.
- Ovviamente si ha
$$(x^n)^2 = x^n \cdot x^n = x^{2n}$$
e in generale
$$(x^n)^m = x^{nm}.$$
- Se $x \geq 1$ e $n \geq 0$ si ha $x^n \geq 1$. Più in generale se $x \geq 1$ e n, m sono due numeri interi con $n \leq m$ si ha $x^m = x^n \cdot x^{m-n} \geq x^n$.

Più in generale, le potenze a^b si possono definire per qualunque numero reale $a > 0$ e qualunque numero reale b (anche negativo). Valgono sempre le stesse regole:
$$a^b a^c = a^{b+c}, \qquad (a^b)^c = a^{bc}, \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \qquad 1^b = 1,$$
$$\text{e} \quad a^b \leq a^c \quad \text{ogni volta che } a \geq 1 \text{ e } b \leq c\,.$$
È importante ricordare che per poter fare le potenze a^b in cui l'*esponente* b è un qualsiasi numero reale, la *base* a deve essere un numero strettamente positivo. Un caso particolare da conoscere è quello delle potenze frazionarie. Ad esempio, sappiamo che
$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a$$
e quindi il quadrato di $a^{1/2}$ è uguale ad a, ossia $a^{1/2}$ è la radice quadrata di a. Allo stesso modo,
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{è la radice } n\text{-esima di } a$$
e quindi
$$a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

si può scrivere anche

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esempio 3.1. Le prime cinque cifre dello sviluppo decimale di π sono $\pi = 3,1415\ldots$. Quindi $3,141 \le \pi \le 3,142$ e per le proprietà delle potenze si ha

$$2^{3,141} \le 2^{\pi} \le 2^{3,142}$$

che, per quanto visto sulle potenze frazionarie, si può scrivere come

$$\sqrt[1000]{2^{3141}} \le 2^{\pi} \le \sqrt[1000]{2^{3142}} = \sqrt[500]{2^{1571}}.$$

Se a, b sono numeri reali positivi ed $n \in \mathbb{N}$ è chiaro che $a^n b^n = (ab)^n$; gli stessi ragionamenti fatti sopra mostrano più in generale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ continua a valere la formula:

$$(ab)^x = a^x b^x\ .$$

Ad esempio $2^4 3^4 = 6^4$, $2^3\pi^2 = 2(2\pi)^2$, $2^{\sqrt{2}}3^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}}$ eccetera.

Esempio 3.2. Per $a, b, c > 0$ si ha

$$\frac{\sqrt[3]{a^4b^2c}}{\sqrt[2]{abc^3}} = \frac{(a^4b^2c)^{\frac{1}{3}}}{(abc^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{7}{6}}\ .$$

Ricordiamo la nozione di logaritmo decimale (torneremo sui logaritmi più avanti). Supponiamo di sapere che

$$10^a = x$$

(dove a può essere un qualunque numero reale). Allora il numero a si chiama il *logaritmo decimale*, o *in base 10*, del numero x, e si scrive

$$a = \log_{10} x = \log_{10}(x)$$

(le parentesi si usano solo se necessario). Quindi vediamo che valgono le regole

$$\log_{10}(10^a) = a \qquad \text{ossia} \qquad 10^{\log_{10} x} = x$$

Ad esempio il logaritmo decimale di $1000 = 10^3$ è 3; il logaritmo decimale di 10^{47} è 47; il logaritmo decimale di $1/10 = 10^{-1}$ è -1; il logaritmo decimale di $\sqrt{10}$ è $1/2$.

Invece il logaritmo di 1 fa zero:

$$\log_{10}(1) = \log_{10}(10^0) = 0.$$

E se il numero x non si sa scrivere come potenza di 10? Ad esempio, quanto fa $\log_{10} 3$? Per rispondere a questa domanda serve un calcolatore; si possono calcolare quante cifre si vogliono dello sviluppo decimale, ma una risposta esatta è impossibile. Il valore approssimato è dato da $\log_{10} 3 = 0,4771212547\ldots$. I valori dei logaritmi dei numeri interi compresi tra 1 e 10, approssimati alla terza cifra decimale, sono riportati nella seguente tabella:

$\log_{10} 2 \simeq 0,301$	$\log_{10} 3 \simeq 0,477$	$\log_{10} 4 \simeq 0,602$	$\log_{10} 5 \simeq 0,699$
$\log_{10} 6 \simeq 0,778$	$\log_{10} 7 \simeq 0,845$	$\log_{10} 8 \simeq 0,903$	$\log_{10} 9 \simeq 0,954$

Dalle regole per le potenze seguono subito regole corrispondenti per il logaritmo. Sono da ricordare:

$$\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b), \qquad \log_{10}(a^b) = b \cdot \log_{10} a$$

cioè il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi, e il logaritmo di una potenza è l'esponente per il logartimo della base. Una conseguenza delle regole precedenti è

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

(infatti $a/b = a \cdot b^{-1}$) e quindi anche

$$\log_{10}\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_{10}(b).$$

Esempio 3.3. Usiamo le proprietà del logaritmo per mostrare che il numero $\log_{10} 3$ è irrazionale, ossia non può essere scritto come quoziente di interi. Se, per assurdo, si avesse $\log_{10} 3 = a/b$, allora $a = b \log_{10} 3 = \log_{10}(3^b)$ che equivale all'uguaglianza $10^a = 3^b$ che non è possibile per $a, b \in \mathbb{N}$ (10^a è pari, mentre 3^b è dispari).

Un uso molto comune delle potenze è la rappresentazione dei numeri in notazione scientifica. La *notazione scientifica* è un modo di scrivere i numeri che permette di confrontarli e capire quanto sono grandi (o piccoli) molto più rapidamente. Un numero scritto in notazione scientifica ha la forma

$$x = 3,12571 \cdot 10^7$$

mentre la notazione tradizionale dello stesso numero sarebbe

$$x = 31.257.100$$

La forma generale è la seguente:

$$x = m, pqrs \ldots \cdot 10^n$$

cioè il numero va scritto come il prodotto di una potenza di 10 (n può essere anche negativo o nullo) per un numero decimale $m, pqrs \ldots$ in cui la parte intera m a sinistra della virgola è un numero intero fra 1 e 9. Allora

- l'esponente n si chiama *ordine di grandezza* del numero x;
- le cifre a destra della virgola si chiamano *cifre significative* del numero x.

Notiamo un fatto molto utile. Se calcoliamo il logaritmo decimale di $x = m, pqrs \ldots \cdot 10^n$ vediamo che

$$\log_{10} x = \log_{10}(m, pqrs \ldots \cdot 10^n) = \log_{10}(m, pqrs) + n$$

e il numero $\log_{10}(m, pqrs)$ è compreso fra 0 e 1 dato che il numero $m, pqrs$ è compreso fra $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$. Quindi vediamo che per calcolare l'ordine di grandezza di un numero x è sufficiente *calcolare il logaritmo decimale di x e prendere la parte intera.*

Esempio 3.4. Vediamo in concreto come si procede per scrivere un numero in notazione scientifica. Se un numero è una potenza di 10 la cosa è banale:

$$1000 = 1 \cdot 10^3, \qquad 1000000 = 1 \cdot 10^6, \qquad 0,00001 = 1 \cdot 10^{-5}, \qquad 1 = 1 \cdot 10^0.$$

Notare che si può anche scrivere $1000 = 10 \cdot 10^2 = 0,1 \cdot 10^4$ ma queste non sono notazioni scientifiche. In particolare l'ordine di grandezza di 1000 è 3, quello di $0,00001$ è -5; e infatti $\log_{10}(1000) = 3$, $\log_{10})0,00001 = -5$.

Se abbiamo un numero più complicato come $x = 121.950,394$, basta scrivere

$$x = 1,21950394 \cdot 10^5$$

quindi l'ordine di grandezza è 5 (notare che 5+1=6 è il numero di cifre della parte intera di x). Invece

$$0,0007432... = 7,432 \cdot 10^{-4}$$

ha ordine di grandezza -4.

Molto spesso non si scrivono tutte le cifre ma solo le prime: ad esempio

$$121.950,39 = 1,21950394 \cdot 10^5 \simeq 1,219 \cdot 10^5$$

è l'espressione approssimata alla terza cifre significative.

Esempio 3.5. Un caso in cui la notazione scientifica è molto comoda riguarda le potenze grandi, se sappiamo usare i logaritmi decimali in modo opportuno. Supponiamo di voler scrivere il numero 8^{100} in notazione scientifica, sapendo che

$$\log_{10} 8 = 0,903...$$

Dato che

$$\log_{10}(8^{100}) = 100 \cdot \log_{10} 8 = 90,3...$$

abbiamo già calcolato l'ordine di grandezza cioè 90 (questo ci dice che 8^{100} ha 91 cifre). Dato che $90,3 \cdots = 90 + 0,3 \ldots$, possiamo scrivere

$$8^{100} = 10^{90,3\ldots} = 10^{0,3\ldots} \cdot 10^{90}$$

e abbiamo quasi finito. Per completare la scrittura in notazione scientifica bisognerebbe calcolare più precisamente $10^{0,3\cdots}$, ma per molti problemi la rappresentazione ottenuta è già sufficiente.

Se abbiamo due numeri scritti in notazione scientifica, confrontarli è facilissimo: quello che ha l'ordine di grandezza maggiore è il più grande; e se i due numeri hanno lo stesso ordine di grandezza, si confrontano le cifre significative. Ad esempio

$$\begin{array}{rcl} 1,902 \cdot 10^{46} & \text{è più grande di} & 8,342 \cdot 10^{44} \\ 3,141 \cdot 10^{-6} & \text{è più grande di} & 2,992 \cdot 10^{-9} \\ 4,554 \cdot 10^{12} & \text{è più grande di} & 3,109 \cdot 10^{12} \end{array}$$

eccetera. Talvolta il modo più efficiente per confrontare due numeri fra di loro è proprio scriverli in notazione scientifica.

Esempio 3.6. Sapendo che $\log_{10} 6 = 0,77815\ldots$, dire se 6^{100} è più grande di 60^{50} oppure no. Abbiamo subito

$$\log_{10}(6^{100}) = 100 \cdot \log_{10} 6 = 100 \cdot 0,77815 \cdots = 77,8\ldots$$

quindi 6^{100} ha ordine di grandezza 77. Invece

$$\log_{10}(60^{50}) = 50 \cdot \log_{10} 60 = 50 \cdot (\log_{10} 6 + \log_{10} 10) = 50 \cdot (0,77815 \cdots + 1) = 39,9\ldots$$

quindi 60^{50} ha ordine di grandezza 39 ed è (molto) più piccolo.

Esercizi.

Esercizio 1.4. Semplificare le espressioni

$$\frac{\sqrt[3]{a^{12}b^6c^7}}{\sqrt{a^5b^3c}}, \qquad \frac{\sqrt[4]{a^9b^5c^2}}{\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}, \qquad \frac{\sqrt[5]{a^2b^3c^3}}{\sqrt[3]{abc^2}}.$$

Esercizio 1.5. Semplificare le espressioni seguenti:

$$\sqrt{a^{12}b^6c^3}, \quad \sqrt[3]{8a^{10}}, \quad \frac{\sqrt[3]{27a^4b^3}}{\sqrt{16a^3b^5}}, \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{c^3}}{\sqrt{a^3}\sqrt[4]{b^9}}.$$

Esercizio 1.6. Mettere in ordine di grandezza i numeri seguenti:

$$2^{200}, \qquad 4^{30}, \qquad 8^{25}, \qquad 16^{51}.$$

Esercizio 1.7. Semplificare le seguenti espressioni:

$$\log_{10}\left(\frac{2^4 10^7}{3^{11}7^3}\right), \qquad \log_{10}\left(\sqrt[n]{a^{12}b^p c^{-1}}\right), \qquad \log_{10}(3,55\cdot 10^{-100}).$$

Esercizio 1.8. Semplificare le espressioni seguenti:

$$\log_{10}(a^3b^2c^5) - \log_{10}(a^3) - \log_{10}\sqrt{a^3b}, \qquad \log_{10}(100) - 4\log_{10}5$$

$$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{abc}}{25}\right) + 2\log_{10}10, \qquad \log_{10}338 - 2\log_{10}13.$$

Esercizio 1.9. Sapendo che $\log_{10}8 = 0,9030...$, calcolare l'ordine di grandezza di $8^{50}, 80^{20}, 800^{30}$.

Esercizio 1.10. Calcolare l'ordine di grandezza di 3^{100}, 9^{100}, 90^{20} e mettere i tre numeri in ordine di grandezza (si usi il fatto che $\log_{10}3 \simeq 0,477$).

Esercizio 1.11. Calcolare l'ordine di grandezza di 8^{100} e di 80^{20}, e dire quali dei due numeri è più grande. (si usi il fatto che $\log_{10}2 \simeq 0,301$).

Esercizio 1.12. Calcolare l'ordine di grandezza di 9^{50} (si usi il fatto che $\log_{10}3 \simeq 0,477$).

Esercizio 1.13. Uno svizzero ed un abruzzese imboccano allo stesso istante i due estremi di un tunnel[1] lungo 738 chilometri. Sapendo che la velocità dello svizzero è lo 0,000025% della velocità del neutrino e la velocità dell'abruzzese è il lo 0,000020% della velocità del neutrino, determinare quanti chilometri percorre lo svizzero prima di scontrarsi con l'abruzzese.

[1]Chi non conosce la storia può googlare la chiave di ricerca "tunnel neutrini".

4. Pratica con le operazioni algebriche: funzioni razionali

Per fare matematica, e più in generale scienza, occorre saper maneggiare con familiarità oggetti matematici più complessi dei semplici numeri. Ad esempio è necessario saper eseguire senza errori le operazioni algebriche tra funzioni razionali.

Una *funzione razionale* è una espressione del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{(leggasi } P(x) \text{ fratto } Q(x)\text{)},$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, con $Q(x) \neq 0$. Sono ad esempio funzioni razionali le espressioni

$$\frac{x+1}{x-1}, \qquad \frac{x^2+x+1}{x^3-2}, \qquad \frac{x^{134}-x^{17}}{x^{22}-3} .$$

Quando il denominatore è il polinomio 1, si scrive semplicemente $\frac{P(x)}{1} = P(x)$ e quindi ogni polinomio può essere interpretato come funzione razionale: ed esempio

$$\frac{x+1}{1} = x+1, \qquad \frac{x^2+x+1}{1} = x^2+x+1 .$$

Cosí come a livello di frazioni numeriche si hanno le uguaglianze $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$, anche per le funzioni razionali si hanno delle uguaglianze, come ad esempio

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x-1} .$$

In generale si ha:

(1) moltiplicando (o dividendo) numeratore e denominatore di una funzione razionale per un medesimo polinomio diverso da 0 la funzione razionale non cambia;

(2) vale la regola che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \quad \text{se e solo se} \quad P(x)S(x) = R(x)Q(x) .$$

Ad esempio si ha $\frac{x^2-4x+4}{x} = \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-x}$, in quanto vale l'uguaglianza

$$(x^2-4x+4)(x^2-x) = (x^3-5x^2+8x-4)x = x^4-5x^3+8x^2-4x .$$

Le operazioni tra funzioni razionali sono del tutto simili a quelle tra frazioni numeriche:

- La somma di funzioni razionali con *lo stesso denominatore* si ottiene sommando i rispettivi numeratori; idem per la differenza. Ad esempio

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{1+x}{x-1}, \qquad \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} .$$

- Se gli addendi non hanno lo stesso denominatore, prima di procedere alla somma con la regola sopra esposta, si moltiplica numeratore e denominatore di ciascuna funzione razionale per un opportuno polinomio in modo tale che tutti gli addendi abbiano lo stesso denominatore. Ad esempio

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1} &= \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x+1+x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}\,.\end{aligned}$$

- Il prodotto si ottiene moltiplicando separatamente i numeratori ed i denominatori. Ad esempio
$$\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1}\,.$$
- L'inversa di una funzione si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore, e viceversa:
$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}\,.$$
- Per eseguire la divisione si esegue la moltiplicazione con l'inverso del divisore:
$$\frac{x^3-1}{x+2} : \frac{x-1}{x^2} = \frac{x^3-1}{x+2}\cdot\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2(x^3-1)}{(x+2)(x-1)}\,.$$
Spesso il segno di divisione : è sostituito con una riga di frazione:
$$\frac{\dfrac{x^2+1}{x-2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{x^2+1}{x-2} : \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-2)(x+1)}\,.$$

Esercizi.

Esercizio 1.14. Eseguire le seguenti operazioni tra funzioni razionali:

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2-1}{x^3+1}\,, \qquad \frac{x-2}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\,, \qquad \frac{1+\dfrac{x}{x-1}}{x+\dfrac{2}{x-1}}+\frac{x}{x^2-1}\,,$$

$$\frac{3-x}{2x+5}-\frac{2x+4}{x-3}-\frac{x^2-3x+1}{2x^2-x-15}\,, \qquad \frac{x-1}{2x+3}-\frac{2x^2+5x-1}{4x^2-9}+\frac{6x-7}{(2x-3)^2}\,,$$

$$\frac{x^3+x^2}{1-x^2}+1-x-\frac{1-x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{1-x}\,, \qquad \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x^2}\right)\,,$$

$$\left(x+1-\frac{1}{1-\dfrac{x}{1+x-\dfrac{x}{1-2x}}}+\frac{x^2}{1-3x}\right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-8}+\frac{x-1}{x+2}\right)\,.$$

Esercizio 1.15 (⏭). Calcolare, se esistono, i due numeri reali a, b tali che

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}\,.$$

Esercizio 1.16. Calcolare, se esistono, i tre numeri reali a, b, c tali che

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} \ .$$

5. Equazioni e sistemi

Quando scriviamo un'uguaglianza, ad esempio $2 = 2$ oppure $a = a$, stiamo semplicemente osservando un fatto che sappiamo essere vero; qualche volta invece stiamo dicendo una cosa falsa, ad esempio nessuno ci vieta di scrivere $1 = 2$, solo che si tratta di un'affermazione falsa.

Un'*equazione* è una cosa un po' diversa. Un'equazione è un modo molto sintetico di descrivere un problema da risolvere. Ad esempio, se diciamo

"risolvere l'equazione $2x - 5 = 7$"

stiamo in realtà dicendo:

"trovare tutti i numeri reali x tali che il doppio di x meno cinque fa esattamente sette".

Quindi, le soluzioni di un'equazione possono essere tante, oppure solo una, oppure nessuna (in questo caso si dice che l'equazione è impossibile). La lettera che indica la quantità da determinare si chiama anche l'*incognita*, nell'equazione precedente abbiamo usato la lettera x.

Molto spesso, tanto per complicare le cose, in un'equazione si usano varie lettere; tutte le lettere indicano numeri reali, ma solo una è l'incognita. In questi casi, per far capire qual è l'incognita si dice:

"risolvere l'equazione $ax + b = c$ *rispetto a* x".

Le altre lettere a, b, c stanno ad indicare dei numeri reali fissati, ma che non vogliamo scegliere subito; in questo modo ci riserviamo la libertà di sceglierli dopo avere risolto l'equazione, e le formule che otteniamo per la soluzione si possono applicare a tante equazioni diverse.

Come si fa a risolvere un'equazione? Dipende. Certe equazioni sono molto facili da risolvere, certe sono molto difficili. Le equazioni che abbiamo scritto finora sono molto facili, si tratta di *equazioni di primo grado* che si impara a risolvere nelle scuole superiori. Ad esempio l'equazione $ax + b = c$, quando $a \neq 0$ (a diverso da 0) si risolve subito in due passaggi:

$$ax + b = c \quad \iff \quad ax = c - b \quad \iff \quad x = \frac{c-b}{a}.$$

Il simbolo $\iff$ si legge "*se e solo se*", o anche "*è equivalente a*", e vuol dire che le due espressioni a destra e sinistra sono la stessa cosa, scritta in modo diverso. Notate che nel primo passaggio abbiamo sottratto b ad ambo i membri, nel secondo passaggio abbiamo diviso ambo i membri per a; le equazioni si risolvono sempre cosí, con una serie di passaggi che trasformano l'equazioni in una equivalente piú semplice.

E se $a = 0$? L'equazione diventa un po' strana perché scompare l'incognita. Ma proviamo ad andare fino in fondo: abbiamo due possibilità. Se i numeri b e c sono diversi, l'equazione $0 \cdot x + b = c$ chiaramente è impossibile. E se $b = c$? Per esempio, che vuol dire risolvere rispetto a x l'equazione $0 \cdot x + 3 = 3$? Semplicissimo: tutti gli x vanno bene, quindi le soluzioni sono tutti i numeri reali.

Sempre nelle scuole superiori si studiano le *equazioni di secondo grado*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Il procedimento standard di soluzione porta alla seguente regola: si calcola il *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$, non ci sono soluzioni. Se $\Delta > 0$, ci sono due soluzioni distinte date dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Infine se $\Delta = 0$, la formula precedente è ancora giusta, ma fornisce una sola soluzione $x = -\frac{b}{2a}$; si dice anche che le due radici coincidono. (Per studiare piú a fondo l'equazione di secondo grado servirebbero i *numeri complessi*, ma questo va al di là dei nostri obiettivi...)

È utile ricordare che trovare le soluzioni di una equazione di secondo grado è equivalente a scomporre il polinomio come prodotto di fattori lineari. Infatti se $a \neq 0$ e se α, β sono le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora vale la formula

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)\ . \tag{5.1}$$

Quasi sempre nei problemi concreti succede di dover risolvere varie equazioni contemporaneamente. In questo caso abbiamo un problema di tipo piú complicato che si chiama un *sistema*. Si usa la notazione seguente: risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 6x - 5 = 1 \end{cases}$$

vuol dire "trovare tutti i numeri x che risolvono *sia* la prima *sia* la seconda equazione". Un procedimento che funziona quasi sempre è il seguente: prima si risolve ciascuna equazione del sistema, separatamente; in questo modo si ottiene l'insieme delle soluzioni della prima, della seconda eccetera. Alla fine, si confrontano i vari insiemi e si cercano tutti gli x in comune fra tutti gli insiemi di soluzioni: cioè si fa l'*intersezione* delle soluzioni. Nel sistema precedente,

la prima equazione ha per soluzioni $x = 1, 2$;

la seconda equazione ha per soluzione $x = 1$;

questi due insiemi di soluzioni hanno in comune solo il valore $x = 1$, quindi l'unica soluzione del sistema è $x = 1$.

Esercizi.

Esercizio 1.17. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{x-1}{x(x-2)} = 2, \qquad \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = 2, \qquad \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = 4\ .$$

Esercizio 1.18. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2, \qquad x + \frac{1}{x} = 2, \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0\ .$$

Esercizio 1.19. Usando la formula (5.1) semplificare le seguenti funzioni razionali:

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1}, \qquad \frac{x-2}{x^2-3x+2}, \qquad \frac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}, \qquad \frac{x^2+10x-200}{x^3-10x^2} \cdot \frac{x^3-x}{2x+40}\ .$$

Esercizio 1.20. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ 5x - 4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^3 - x^2 + 6x - 16 = 0 \end{cases}$$

6. Le disequazioni

Come le equazioni, anche le *disequazioni* sono un modo sintetico di descrivere un problema. In prima approssimazione possiamo dire che una disequazione è come un'equazione dove al posto del segno di uguaglianza $=$ compare uno dei 5 segni

$$\neq, \quad <, \quad >, \quad \leq, \quad \geq \ .$$

Ad esempio, risolvere la seguente disequazione di primo grado

$$5 - 8x > 13$$

significa trovare tutti i numeri x che soddisfano questa condizione.

Le disequazioni di primo grado si risolvono come le equazioni di primo grado, c'è solo una differenza importante da ricordare: quando si moltiplicano o si dividono ambo i membri di una disuguaglianza per un numero *negativo*, la disuguaglianza *cambia di verso*. Ad esempio,

$$2 \leq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \geq -5.$$

Per risolvere la disequazione qui sopra bastano pochi passaggi:

$$5 - 8x > 13 \iff -8x > 13 - 5 \iff -8x > 8 \iff x < \frac{8}{-8} \iff x < -1.$$

Se preferite, possiamo risolvere anche cosí:

$$5 - 8x > 13 \iff 5 - 13 > 8x \iff -8 > 8x \iff \frac{-8}{8} > x \iff -1 > x$$

che è esattamente la stessa cosa.

Di solito l'insieme delle soluzioni è un intervallo, o una unione di intervalli; è utilissimo disegnare sempre l'insieme delle soluzioni sulla retta reale, questo aiuta a risolvere e qualche volta a scoprire degli errori.

Le disequazioni di secondo grado hanno la forma

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{oppure} < 0, \geq 0, \leq 0, \neq 0.$$

Queste disequazioni si risolvono in modo semplicissimo: infatti dobbiamo soltanto stabilire il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$. Ma, come si studia nelle scuole superiori, per capire il segno del trinomio basta immaginare una parabola con i rami rivolti verso l'alto quando $a > 0$ (Figura 1.7),

e verso il basso quando $a < 0$ (Figura 1.8).

Il segno del trinomio è lo stesso della parabola.

$$\boxed{ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac}$$

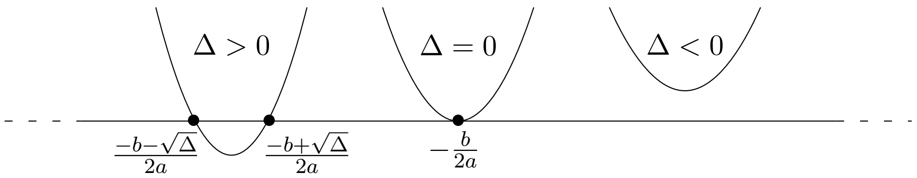


FIGURA 1.7.

$$\boxed{ax^2 + bx + c, \quad a < 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac}$$

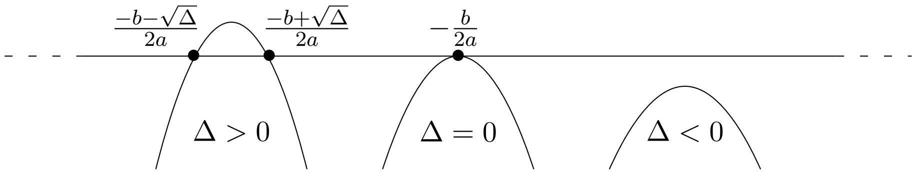


FIGURA 1.8.

Esempio 6.1. Ad esempio risolviamo la disequazione

$$x(x-4) \geq 3 - 2x.$$

Anzitutto portiamo tutto a primo membro e raccogliamo: otteniamo

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

$x^2 - 2x - 3$ è una parabola verso l'alto, ha due radici distinte $x = -1$ e $x = 3$, qundi è positiva nella zona esterna alle radici e negativa nell'intervallo fra le due radici. Nella disequazione si richiede la zona ≥ 0, quindi la soluzione è data dalla zona esterna alle radici, *radici comprese* (notare il maggiore *o uguale*):

$$x \leq -1 \quad \text{e} \quad x \geq 3.$$

Naturalmente possiamo considerare anche *sistemi di disequazioni*, o sistemi misti con equazioni e disequazioni; in questi casi un disegno può essere indispensabile!

Esempio 6.2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3(x^2-5) < (x+1)x \\ 1 - x < 3x - 4. \end{cases}$$

Anzitutto semplifichiamo e risolviamo separatamente le due equazioni:

$$\iff \begin{cases} 2x^2 - x - 15 < 0 \\ 4x > 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{5}{2} < x < 3 \\ x > \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Per finire, dobbiamo trovare i punti in comune fra le soluzioni della prima e della seconda equazione (cioè fare l'intersezione dei due insiemi):

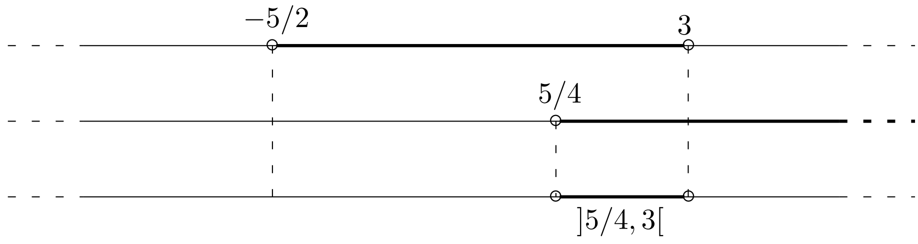


Figura 1.9.

e otteniamo che le soluzioni sono tutti i numeri x tali che

$$\frac{5}{4} < x < 3.$$

Esempio 6.3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5x - 3 \geq -2x^2 \\ 8x - 7 < 2x + 3 \\ x(2x-5) = (x-2)(x+2). \end{cases}$$

Si ha subito

$$\iff \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \\ 6x < 10 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -3 \quad \text{e} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{5}{3} \\ x = 1 \quad \text{e} \quad x = 4. \end{cases}$$

Vediamo subito dal diagramma

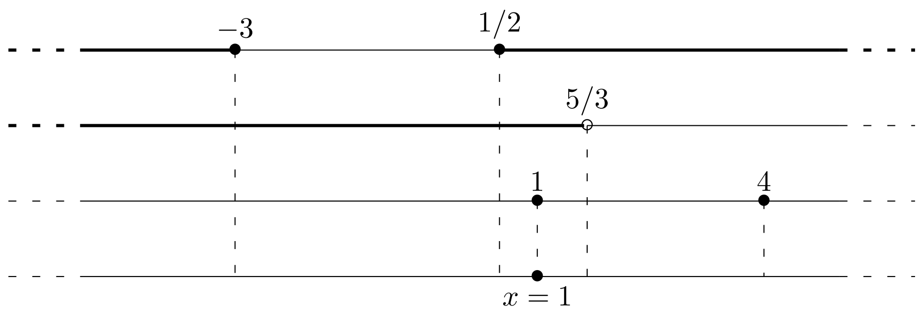


Figura 1.10.

che l'unica soluzione del sistema è $x = 1$.

Esercizi.

Esercizio 1.21. Risolvere le disequazioni (non è un sistema! sono quattro disequazioni separate):

$$2x^2 \leq 1 - x; \qquad x(2-3x) > x - 6;$$
$$2x \geq -x^2 - 1; \qquad x^2 + x < -1.$$

Esercizio 1.22 (▶▶|)**.** Risolvere i seguenti sistemi:

$$a)\ \begin{cases} x^2-1<x \\ x-2>2x \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ 2x\leq x+1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x^2<4 \end{cases}$$

Esercizio 1.23. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x-3>2 \\ x+1<5 \\ x-3<6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+5>-1 \\ x^2-2x-3<0 \\ 12-3x>-3-x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3\neq 1 \\ x^2+2x-3\geq 0 \\ 3-x<15+2x. \end{cases}$$

7. Il valore assoluto

Dato un numero reale x, vogliamo definire il suo *valore assoluto*, che si indica con il simbolo $|x|$. Cominciamo da qualche esempio:

il valore assoluto di 3 è 3;

il valore assoluto di -10 è 10;

il valore assoluto di 0 è 0.

Chiaro? Il valore assoluto di un numero positivo è uguale al numero; il valore assoluto di un numero negativo è l'opposto del numero. (Il valore assoluto di zero è zero perché si può considerare sia positivo che negativo e il risultato è lo stesso). Quindi il risultato è sempre un numero positivo. Riassumendo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0, \\ -x & \text{se } x\leq 0. \end{cases}$$

La stessa regola si applica in casi un po' piú generali. Ad esempio:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2\geq 0, \\ -x+2 & \text{se } x-2\leq 0 \end{cases}$$

il che si può scrivere anche cosí:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x\geq 2, \\ 2-x & \text{se } x\leq 2. \end{cases}$$

A volte, il valore assoluto di x si dice anche il *modulo* di x.
Quando in una equazione (o disequazione) compare un valore assoluto, in realtà abbiamo a che fare con due equazioni diverse, a seconda di dove si trova l'incognita x. Vediamo un esempio.

Esempio 7.1. Risolviamo l'equazione

$$|x-2| = 5\,.$$

Tale equazione è soddisfatta se e soltanto se vale $x-2=5$ oppure $x-2=-5$. Nel primo caso troviamo $x=7$, nel secondo $x=-3$.

Esempio 7.2. Supponiamo di volere risolvere l'equazione

$$2x+|x| = 1-x.$$

Anzitutto dobbiamo interpretare la presenza del valore assoluto. Dato che $|x|$ significa due cose diverse a seconda che sia $x\geq 0$ oppure $x\leq 0$, procediamo cosí:

dividiamo tutti i possibili numeri x in due gruppi e studiamoli separatamente. Primo gruppo: tutti gli $x \geq 0$; per questi x sappiamo che $|x| = x$, quindi dobbiamo risolvere l'equazione

$$2x + x = 1 - x \qquad \iff \qquad 4x = 1 \qquad \iff \qquad x = \frac{1}{4}.$$

Notiamo che questa equazione è esattamente quella di partenza per gli $x \geq 0$, ma sugli x negativi non ha niente a vedere con l'equazione di partenza! Dato che la nuova equazione ha una soluzione $x = \frac{1}{4}$ nella zona sotto studio, possiamo accettarla: abbiamo trovato una soluzione dell'equazione di partenza. Ma non finisce qui; dobbiamo studiare anche il caso $x \leq 0$. Per questi valori di x sappiamo che $|x| = -x$, quindi l'equazione di partenza diventa

$$2x - x = 1 - x \qquad \iff \qquad 2x = 1 \qquad \iff \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Anche in questo caso abbiamo risolto il valore assoluto, abbiamo ottenuto una nuova equazione, e l'abbiamo risolta; ma disgraziatamente la soluzione trovata non sta nella zona giusta. Infatti la nuova equazione è equivalente a quella di partenza solo per gli $x \leq 0$; per gli $x \geq 0$ invece non ha niente a che vedere con essa. In conclusione, la soluzione è soltanto una: $x = \frac{1}{4}$.

Vediamo un altro esempio; il metodo è sempre lo stesso! Notare che se si parte da un'equazione di secondo grado, quando risolviamo il valore assoluto otteniamo *due equazioni diverse* di secondo grado; quindi a seconda dei casi il numero delle soluzioni può variare da 0 (nessuna soluzione) fino a 4.

Esempio 7.3. Risolvere l'equazione

$$x^2 - x - 2 = |x + 1|.$$

Anzitutto dobbiamo capire il significato del valore assoluto:

$$|x+1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1, \\ -x - 1 & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Quindi distinguiamo le due zone $x \geq -1$ e $x \leq -1$ e in ognuna di esse otteniamo un'equazione diversa da risolvere solo in quella zona. Proviamo: se $x \geq -1$ al posto di $|x + 1|$ mettiamo $x + 1$ e otteniamo l'equazione

$$x^2 - x - 2 = x + 1 \qquad \iff \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \iff \qquad x = -1 \text{ e } x = 3.$$

Entrambe le soluzioni cadono nella zona sotto esame $x \geq -1$, quindi possiamo accettarle tutte e due. Passiamo alla zona $x \leq -1$: qui il valore assoluto significa $|x + 1| = -x - 1$, e sostituendo otteniamo l'equazione

$$x^2 - x - 2 = -x - 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = +1 \text{ e } x = -1.$$

La soluzione -1 è accettabile, comunque l'abbiamo già trovata come soluzione del primo caso. Invece dobbiamo scartare la seconda soluzione $+1$ perché non cade nella zona sotto esame $x \leq -1$. Risposta finale del problema: l'equazione ha esattamente due soluzioni $x = -1$ e $x = 3$.

Esempio 7.4. Risolviamo l'equazione $|x^2 - 1| = |x^2 + 1| - 1$. Siccome $x^2 + 1$ è sempre maggiore od uguale a 0, l'equazione diventa

$$|x^2 - 1| = x^2 + 1 - 1 = x^2 .$$

Se $x^2 \geq 1$ si ha $x^2 - 1 \geq 0$ e l'equazione diventa $x^2 - 1 = x^2$, che è chiaramente senza soluzioni. Se $x^2 \leq 1$ si ha $x^2 - 1 \leq 0$ e l'equazione diventa $1 - x^2 = x^2$, ossia $2x^2 = 1$ che ha come soluzioni $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

Naturalmente possiamo anche considerare *disequazioni* contenenti un valore assoluto; il procedimento è completamente analogo al precedente.

Esempio 7.5. Risolvere la disequazione

$$|3 - x| < \frac{1}{2}x - 1.$$

Il valore assoluto significa

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x \leq 3, \\ -3 + x & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Come al solito dividiamo tutti gli x in due gruppi. Nella zona $x \leq 3$ sostituiamo al valore assoluto $|3 - x|$ il suo significato $3 - x$ e otteniamo la disequazione

$$3 - x < \frac{1}{2}x - 1 \quad \iff \quad -\frac{3}{2}x < -4 \quad \iff \quad x > \frac{8}{3}.$$

Quindi, esaminando tutti gli $x \leq 3$, abbiamo scoperto che le soluzioni sono tutti i numeri $x > \frac{8}{3}$: ossia abbiamo ottenuto che tutti gli x

$$\frac{8}{3} < x \leq 3$$

sono soluzioni della disequazione data.

Passiamo al secondo gruppo $x \geq 3$; in questo caso l'equazione significa

$$-3 + x < \frac{1}{2}x - 1 \quad \iff \quad \frac{1}{2}x < 2 \quad \iff \quad x < 4$$

e quindi anche tutti gli x

$$3 \leq x < 4$$

sono soluzioni.

Se mettiamo insieme tutte le soluzioni ottenute, cioè $\frac{8}{3} < x \leq 3$ e $3 \leq x < 4$, possiamo concludere che le soluzioni della disequazione data sono gli x

$$\frac{8}{3} < x < 4.$$

Esempio 7.6. Risolvere la disequazione

$$x^2 \leq 2x + 2|x|.$$

Dobbiamo distinguere i due casi $x \geq 0$ e $x \leq 0$. Quando $x \geq 0$ abbiamo $|x| = x$, quindi l'equazione diventa

$$x^2 \leq 4x \quad \iff \quad x^2 - 4x \leq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x \leq 4$$

(parabola rivolta verso l'alto, con radici 0 e 4). Dato che stiamo esaminando la zona $x \geq 0$, abbiamo ottenuto le soluzioni

$$0 \leq x \leq 4.$$

Passiamo alla zona $x \leq 0$ dove $|x| = -x$: l'equazione diventa

$$x^2 \leq 2x - 2x \quad \iff \quad x^2 \leq 0 \quad \iff \quad x = 0$$

e quindi $x = 0$ è soluzione, ma lo sapevamo già dal primo gruppo. In conclusione, le soluzioni della disequazione sono gli x tali che

$$0 \leq x \leq 4\,.$$

Naturalmente con gli stessi metodi si risolvono i sistemi di disequazioni contenenti moduli: prima si risolve *separatamente* ciascuna equazione, e poi si cercano le soluzioni in comune fra tutte le equazioni del sistema.

Esercizi.

Esercizio 1.24 (⏭). Risolvere le seguenti equazioni:

a) $|2x-1| = |x| + 4$; *b*) $|x-1| = 3 - x$; *c*) $|x-3| = 2|x-5|$;

Esercizio 1.25. Risolvere le seguenti equazioni:

$$|x-1| = 2x-3; \qquad |2x+1| + x = 1; \qquad x \cdot |x| - 2x + 1 = 0;$$
$$2x \cdot |x| - x = -2; \qquad x = |x|; \qquad x \cdot |x| - 3x + 2 = 0;$$
$$x^2 = x + |x| - 1; \qquad 2x \cdot |x| = 2|x| - 3; \qquad x = 3x(|x|-2) + 3;$$
$$x \cdot |x-1| = 2x+1; \qquad (x+|x|)^2 = 3x-1; \qquad x^2 + x + 1 = x \cdot |x| - 6x - 5.$$
$$x \cdot |x| - 2x + 1 = 0; \qquad |(x-1)(x-2)| = x-3; \qquad 6|x| + 2|x-1| = 3|x-2|\,.$$

Esercizio 1.26. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$|x-1| \leq x+2; \qquad |2-x| > 3; \qquad x+1 \geq |x-5|;$$
$$|x+1| - x^2 \geq 0; \qquad 2x \cdot |x| - x \geq -2; \qquad 2x^2 < |x+1|;$$
$$4x^2 + 4|x| < 3; \qquad 4x \cdot |x| + 4|x| - 3 \geq 0; \qquad x \cdot |x| - |x| + 2 < 0.$$
$$|x^2 + 3x - 4| < 2, \qquad \frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0, \qquad (|x|+1)(|x|-1) \leq 0\,.$$

Esercizio 1.27. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 2x \leq |x| + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \cdot |x| + x - 3 = 0 \\ |x| > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2|x-2| < 3x \\ x^2 + |x| < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 3 \\ |x+1| < 16 \\ 2x^2 + 4 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7|x| - 5 > -1 \\ x^2 - 2|x| - 3 < 0 \\ 12 - 3x > -3 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 5|x| \\ x^2 > 4 \\ 6x - 1 < x + 3. \end{cases}$$

8. Equazioni e disequazioni irrazionali

In alcuni casi le equazioni o disequazioni da risolvere contengono una radice quadrata; per eliminarla è necessario elevare al quadrato, in quanto $(\sqrt{A})^2 = A$; ma bisogna fare attenzione a due problemi:
1) una radice quadrata è sempre un numero positivo (≥ 0);
2) l'argomento della radice deve sempre essere un numero positivo.
Vediamo cosa succede se non si fa attenzione a questi fatti. Consideriamo l'equazione

$$\sqrt{x} = 2 - x.$$

Se eleviamo al quadrato ambo i membri senza badare ai due problemi sopra ricordati, otteniamo

$$x = (2-x)^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1 \text{ e } x = 4.$$

Proviamo a sostituire nell'equazione di partenza: $x = 1$ è una soluzione, infatti sostituendo otteniamo $1 = 1$. Invece sostituendo $x = 4$ otteniamo $2 = -2$ assurdo. Dove abbiamo sbagliato?
Il problema è molto semplice: se ad esempio partiamo da una relazione assurda come $2 = -2$, elevando al quadrato possiamo ottenere una relazione vera: $4 = 4$, e quindi qualche volta aggiungiamo soluzioni che non c'erano in partenza.
Vediamo come si risolve l'esercizio in modo corretto. Osserviamo che nell'equazione $\sqrt{x} = 2 - x$ la radice quadrata è definita solo se $x \geq 0$, quindi dobbiamo imporre questa condizione. Poi osserviamo che il primo membro è sempre positivo, quindi anche il secondo membro deve essere positivo: $2 - x \geq 0$. A questo punto abbiamo due membri positivi e se eleviamo al quadrato non aggiungiamo soluzioni:

$$\sqrt{x} = 2 - x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ x = (2-x)^2 \end{cases}$$

e ora risolviamo il sistema ottenuto:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x = 1 \text{ e } x = 4 \end{cases} \iff x = 1.$$

Quindi, in generale: *per eliminare in modo corretto una radice quadrata dobbiamo impostare un sistema:*

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \iff \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x)^2. \end{cases}$$

Studiamo un altro esempio:

$$\sqrt{7 - 6x} = 2 - x.$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 7 - 6x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ 7 - 6x = (2-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{7}{6} \\ x \leq 2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{7}{6} \\ x \leq 2 \\ x = 1 \text{ e } x = -3 \end{cases}$$

e in questo caso non dobbiamo scartare nessuna soluzione ed otteniamo $x = 1$ e $x = -3$.

In modo simile si possono studiare le *disequazioni irrazionali*, ossia contenenti delle radici. Il tipo piú semplice è il seguente:

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x).$$

Anche qui bisogna stare attenti prima di elevare al quadrato; una disuguaglianza si può elevare al quadrato soltanto se sappiamo già che tutti e due i membri sono positivi:

$$2 \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \leq 9$$

ma se proviamo ad elevare al quadrato la disuguaglianza

$$-3 \leq 2$$

otteniamo l'assurdo $9 \leq 4$ e quindi vediamo che se i due membri non sono tutti e due positivi il verso della disuguaglianza può cambiare.

Per risolvere la disequazione

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

bisogna:

1) imporre che la radice sia definita, quindi $A(x)$ deve essere positivo;

2) notare che il secondo membro è maggiore di una radice che è sempre positiva, quindi anche $B(x)$ deve essere positivo;

3) a questo punto possiamo tranquillamente elevare al quadrato.

In altri termini, *dobbiamo impostare il sistema*

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B(x)^2. \end{cases}$$

La disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ si risolve in modo completamente analogo. Vediamo un esempio:

$$\sqrt{8x + 24} < 2x - 2 \iff \begin{cases} 8x + 24 \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \\ 8x + 24 < (2x - 2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 5 > 0 \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado nell'ultimo sistema ha per soluzioni i valori di x esterni all'intervallo delle radici (che sono $x = -1$ e $x = 5$), ossia tutti gli $x > 5$ e tutti gli $x < -1$. Quindi siamo arrivati al sistema

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ x > 5 \ \text{ oppure } \ x < -1 \end{cases}$$

e basta disegnare il solito diagramma per scoprire che le soluzioni del sistema sono tutti i numeri $x > 5$.

Invece per risolvere la disequazione

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x)$$

(o $\sqrt{A(x)} > B(x)$ che è completamente analoga) bisogna distinguere due casi. Se il termine $B(x)$ è strettamente negativo, allora non c'è piú nulla da risolvere, perché il primo membro è una radice che è sempre positiva. In questo modo otteniamo subito il primo gruppo di soluzioni:

$$I. \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

(bisogna sempre imporre che la radice sia definita, ossia A deve sempre essere positivo altrimenti l'espressione di partenza non è definita). Se invece B è positivo, allora possiamo tranquillamente elevare al quadrato e otteniamo il secondo gruppo di soluzioni:

$$II. \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x)^2. \end{cases}$$

Riassumendo, *per risolvere le disequazioni del tipo* $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ *bisogna imporre due sistemi distinti:*

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \quad \Longleftrightarrow \quad I. \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \text{piú} \quad II. \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x)^2. \end{cases}$$

Un esempio: per risolvere la disequazione

$$x - 3 \leq \sqrt{7 - 3x}$$

bisogna risolvere i due sistemi

$$I. \begin{cases} 7 - 3x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \qquad II. \begin{cases} 7 - 3x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 7 - 3x \geq (x - 3)^2. \end{cases}$$

Risolvendo come prima otteniamo dal primo sistema le soluzioni

$$I. \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

mentre il secondo sistema è impossibile (basta confrontare le prime due righe) e non dà altre soluzioni. Tutte le soluzioni quindi sono date da $x \leq \frac{7}{3}$.

Esercizi.

Esercizio 1.28 (▶▶|). Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$$a)\ x + 5 = \sqrt{3 - 3x}; \qquad b)\ x + 5 = \sqrt{3x - 3}; \qquad c)\ \sqrt{2x + 5} = 3x - 3;$$

Esercizio 1.29. Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$$2x - 1 = \sqrt{1 + x}; \qquad \sqrt{x - 3} + 5 + x = 2x - 1; \qquad x - 1 + \sqrt{2 - 6x} = 3;$$

$$\sqrt{x} = 3x - \frac{1}{4}; \qquad \sqrt{x + 1} = 2 - x; \qquad \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2\ .$$

Esercizio 1.30. Risolvere le seguenti equazioni con radice quadrata e valore assoluto:

$$\sqrt{x^2} - |x| = 0; \qquad 2\sqrt{|x| - 1} = x; \qquad \sqrt{x^2 + 1} = |x| + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.31. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$x+5<\sqrt{3-3x};\qquad x+5\le\sqrt{3x-3};\qquad \sqrt{2x+5}<3x-3;$$
$$x+5\ge\sqrt{3-3x};\qquad x+5>\sqrt{3x-3};\qquad \sqrt{2x+5}\ge 3x-3;$$
$$2x-1<\sqrt{1+x};\qquad \sqrt{x-3}+5+x\ge 2x-1;\qquad x-1+\sqrt{2-6x}<3.$$

Esercizio 1.32. Risolvere le disequazioni

$$\frac{x+1}{x-1}\ge 0;\quad \frac{x(x+2)}{x+3}<0;\quad \frac{x|x+2|}{x+3}\le 0;\quad \frac{|x-4|(5-6x)}{2x+9}>0;\quad \frac{x^2(5-x)}{3x-7}<0.$$

9. Segno e insieme di definizione di un'espressione

Consideriamo la seguente disequazione:

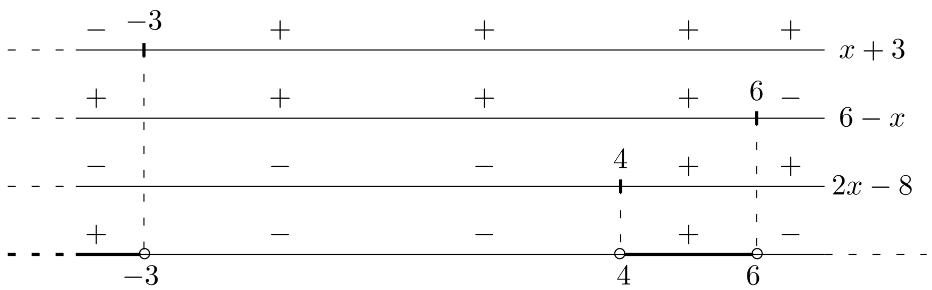
$$(x+3)(6-x)(2x-8)>0.$$

Per risolverla potremmo procedere come negli esempi precedenti e cominciare a moltiplicare, dividere, portare a secondo membro ecc.; ma in realtà c'è un modo molto piú semplice. Infatti basta osservare che l'esercizio chiede semplicemente: *per quali valori di x l'espressione a sinistra è positiva?* Cioè, tutto quello che ci interessa è il segno del prodotto $(x+3)(6-x)(2x-8)$.

Ma il segno di un prodotto è il prodotto dei segni, quindi basta studiare separatamente il segno di $(x+3)$, $(6-x)$ e $(2x-8)$ e alla fine fare il prodotto dei segni. In pratica procediamo cosí: osserviamo che:

$x+3$ ha segno $+$ quando $x>-3$, e ha segno $-$ altrimenti;
$6-x$ ha segno $+$ quando $x<6$, e ha segno $-$ altrimenti;
$2x-8$ ha segno $+$ quando $x>4$, e ha segno $-$ altrimenti.

Poi riportiamo questi risultati nel diagramma dei segni seguente, dal quale è molto semplice stabilire il prodotto dei segni, riportato nella riga piú in basso:



e quindi il prodotto è positivo per tutti gli

$$x<-3 \text{ e } 4<x<6.$$

Bisogna fare attenzione a quello che succede nei punti $x=-3$, $x=4$ e $x=6$; in questi punti il prodotto si annulla, ma nella disequazione chiediamo che il prodotto sia strettamente positivo, quindi i tre punti devono essere scartati.

Lo stesso metodo funziona se l'espressione di cui cerchiamo il segno è un misto di prodotti e rapporti:

$$\frac{2x-3}{(x+2)(6-x)}\le 0$$

infatti il rapporto dei segni è identico al prodotto dei segni. Nel caso del rapporto naturalmente bisogna escludere i valori di x che annullano il denominatore! Risolviamo l'esercizio:

$2x - 3$ ha segno $+$ quando $x > \frac{3}{2}$, e ha segno $-$ altrimenti;
$x + 2$ ha segno $+$ quando $x > -2$, e ha segno $-$ altrimenti;
$6 - x$ ha segno $+$ quando $x < 6$, e ha segno $-$ altrimenti.

Disegnamo il solito diagramma; osserviamo inoltre che la disequazione è con il $\leq$, quindi oltre all caso di segno negativo accettiamo anche il caso in cui la frazione si annulla; infine togliamo i punti che annullano il denominatore. In conclusione otteniamo

$$-2 < x \leq \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad 6 < x.$$

Un'ultima osservazione utile: se qualcuno dei fattori è un *valore assoluto*, allora bisogna fare attenzione nei punti dove esso si annulla; infatti se non si annulla è positivo e quindi inutile inserirlo nel diagramma, perché non cambia il segno dell'espressione; ad esempio per risolvere

$$\frac{|x-4|}{(3-x)|x-2|} \geq 0$$

non c'è bisogno di disegnare il diagramma: infatti $|x - 2|$ è sempre positivo o nullo, $|x - 4|$ è sempre positivo o nullo, quindi il segno di tutta l'espressione coincide con il segno di $3 - x$ e la soluzione è: $x < 3$, $x \neq 2$ (scartare $x = 2$ e $x = 3$ perché annullano il denominatore).

Quando si scrive un'espressione contenente una variabile, come ad esempio

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$$

si intende che la variabile x è un numero reale arbitrario, e a seconda del valore di x l'espressione assume un valore diverso. Ma bisogna fare un po' di attenzione: per alcuni valori di x l'espressione non si può calcolare. Ad esempio nell'espressione precedente compare una divisione, e non si può dividere per zero; inoltre compare una radice quadrata, e non si può estrarre la radice quadrata di un numero negativo. L'insieme di tutti gli x per cui l'espressione si può calcolare si chiama *l'insieme di definizione* dell'espressione. Proviamo a studiare l'insieme di definizione dell'espressione precedente: dobbiamo imporre che il denominatore sia diverso da zero e che l'argomento della radice sia ≥ 0, cioè abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ \\ \dfrac{x+2}{x-3} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 3 \\ \\ \dfrac{x+2}{x-3} \geq 0. \end{cases}$$

Notare che nella seconda riga abbiamo usato il $\geq$ perché se l'argomento della radice si annnulla non c'è nessun problema ($\sqrt{0} = 0$); il problema c'è solo se l'argomento è strettamente negativo. Risolviamo la seconda disequazione con i metodi noti ed otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \leq -2 \text{ e } x > 3 \end{cases}$$

e quindi l'insieme di definizione è semplicemente

$$x \leq -2 \text{ e } x > 3\ .$$

Usando una notazione piú sintetica possiamo scrivere anche

$$I.D. =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[\ .$$

Esercizi.

Esercizio 1.33. Determinare l'insieme di definizione delle espressioni seguenti:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}; \qquad \sqrt{\frac{x(x+2)}{x+3}}; \qquad \sqrt{x-\frac{1}{x}}; \qquad \sqrt{1-x^2}; \qquad \sqrt{x^2-3x+2};$$

$$x^2+\frac{1}{2-x}; \qquad \sqrt{\frac{x|x-2|(x-3)}{4-3x}}; \qquad \frac{1}{x^2-5x+4}; \qquad \sqrt{x|x|-2x+3};$$

$$\sqrt{10-2x-x^2}; \qquad \sqrt{|x-4|(x+2|x|-2)}; \qquad \frac{1}{x+|x|}; \qquad \sqrt{\frac{|x-2|}{|x-3|}};$$

$$\sqrt{|x+4|}; \qquad \sqrt{\frac{1}{|x+4|}}; \qquad \frac{1}{|x^2-8x+10|}; \qquad \frac{1}{\sqrt{x+1}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

CAPITOLO 2

Elementi di algebra lineare

1. Vettori

Nel capitolo precedente ci siamo familiarizzati con i numeri reali e abbiamo definito l'insieme $\mathbb{R}$; abbiamo inoltre visualizzato questo insieme come una retta, la *retta reale*. Ora introduciamo il concetto di *vettore*: i vettori sono semplicemente delle coppie, oppure delle triple, o in generale delle n-uple di numeri reali. Ma andiamo con ordine.

Un *vettore* di $\mathbb{R}^2$ è una coppia ordinata di numeri reali (x, y) (ordinata vuol dire che (x, y) e (y, x) sono due vettori diversi). Ad esempio $(1, 0)$, $(3, 7)$ e $(7, 3)$ sono tre vettori distinti di $\mathbb{R}^2$.

I numeri x e y si dicono anche le *componenti* del vettore (x, y). Il vettore $(0, 0)$ si chiama anche il vettore *nullo*. Notare che quando diciamo che un vettore v è *non nullo* stiamo dicendo soltanto che v non è il vettore nullo, quindi basta che una delle sue componenti sia diversa da zero. Ad esempio il vettore $(1, 0)$ è non nullo.

C'è un modo molto efficace di visualizzare i vettori di $\mathbb{R}^2$: si tratta del ben noto *piano cartesiano*. Richiamiamo la costruzione per completezza: prendiamo un piano, e su di esso tracciamo due rette perpendicolari che possiamo considerare come due rette reali, con l'origine nel punto di intersezione. Se su una delle due rette consideriamo il punto x e sull'altra il punto y, e disegnamo le parallele alle due rette passanti per questi due punti, il punto di intersezione rappresenta il vettore (x, y):

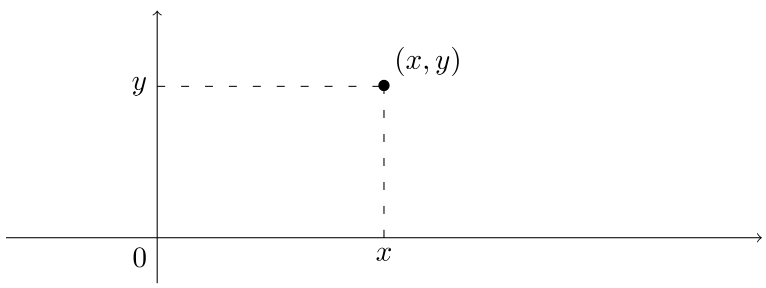


FIGURA 2.1.

L'origine rappresenta il vettore nullo $(0, 0)$. Molto spesso è utile disegnare una freccia che unisce l'origine al punto (x, y), specialmente per visualizzare le operazioni fra i vettori che definiremo in seguito; ma per noi il vettore è soltanto la "punta" della freccia:

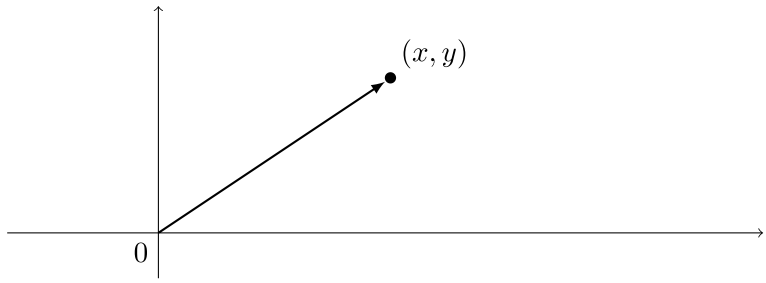


FIGURA 2.2.

L'insieme di tutti i vettori si indica con $\mathbb{R}^2$ e il piano cartesiano ne è la raffigurazione intuitiva.

Per indicare un vettore si possono usare varie notazioni. La piú comune è (x, y); qualche volta è comodo indicare il vettore con una sola lettera, ad esempio $X = (x, y)$. In altri casi è utile usare degli indici per distinguere la prima e la seconda componente, e si scrive $x = (x_1, x_2)$; attenzione a non fare confusione, quando si usa l'ultima notazione la lettera x rappresenta *tutto* il vettore, e non soltanto una delle componenti. Con un po' di pratica si riesce a passare da una all'altra notazione senza problemi.

Sui vettori di $\mathbb{R}^2$ possiamo definire alcune operazioni elementari. La *somma* di due vettori $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ si calcola sommando ciascuna delle componenti:

$$v + w = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

(Il simbolo := è ancora un simbolo di uguaglianza e quindi del tutto equivalente al simbolo = . I due punti servono ad indicare che si tratta di una definizione, e saper distinguere le definizioni dagli enunciati è fondamentale per capire la matematica.)

Il *prodotto* di un vettore $v = (v_1, v_2)$ per un numero reale t si calcola in modo simile:

$$tv = t(v_1, v_2) := (tv_1, tv_2).$$

Il vettore tv si dice anche un *multiplo* del vettore v. Quando $t = -1$ il vettore $(-1)v = (-v_1, -v_2)$ si indica semplicemente con $-v$ e si chiama l'*opposto* di v. Quindi la *differenza* di due vettori è semplicemente il vettore

$$(v_1, v_2) - (w_1, w_2) := (v_1 - w_1, v_2 - w_2).$$

I vettori della forma tv si dicono anche *multipli* del vettore v. Infine definiamo il *prodotto scalare* di due vettori $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, il cui risultato è un numero reale:

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Spesso si usa il termine *scalare* per indicare un numero reale. Abbiamo appena visto che il prodotto scalare di due vettori è uno scalare (appunto).

Infine il *modulo* del vettore $v = (x, y)$ è il numero

$$|v| := \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'unico vettore di modulo zero è il vettore nullo; tutti gli altri vettori hanno modulo strettamente positivo. A vote si usa il termine *norma* per indicare il modulo.

Tutte le precedenti definizioni si estendono in modo naturale alle *triple* di numeri reali (x_1, x_2, x_3) o (x, y, z), che si dicono anche i *vettori* di $\mathbb{R}^3$. Quindi, dati due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ possiamo calcolare la somma

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3),$$

la differenza

$$v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3),$$

il prodotto per un numero reale t

$$tv = (tv_1, tv_2, tv_3),$$

il prodotto scalare

$$v \cdot w = v_1 w_2 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

e il modulo

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Il vettore *nullo* è $(0, 0, 0)$; due vettori sono *ortogonali* quando il loro prodotto scalare è uguale a zero.

Esempio 1.1. Vediamo qualche esempio numerico. Somma e differenza di vettori:

$$(2, -1) + (5, 6) = (7, 5); \qquad (0, 12) - (13, -3) = (-13, 16);$$
$$(1, 5, 4) + (3, 4, -1) - (3, 3, 0) = (1, 6, 3).$$

Prodotto di vettore per numero (multiplo di un vettore):

$$5(-2, 0, 2) = (-10, 0, 10); \qquad t(10, 2, -3) = (10t, 2t, -3t);$$
$$2(3, 6) + 3(1, -1) - 9(1, 1) = (6, 12) + (3, -3) - (9, 9) = (0, 0).$$

Prodotto scalare di due vettori:

$$(1, 3, 6) \cdot (-1, -1, -10) = -1 - 3 - 60 = -64; \qquad (1, 1) \cdot (1, -1) = 0.$$

Modulo di un vettore:

$$|(3, 4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \qquad |(1, 1, 1)| = \sqrt{3}; \qquad |(-1, -2, -3)| = \sqrt{14}.$$

Osservazione 1.2. Queste operazioni si possono visualizzare in modo semplice utilizzando il piano cartesiano. Ad esempio per disegnare la somma di due vettori v e w basta disegnare il parallelogramma che ha per vertici v, w e l'origine; il quarto vertice rappresenta la somma $v + w$:

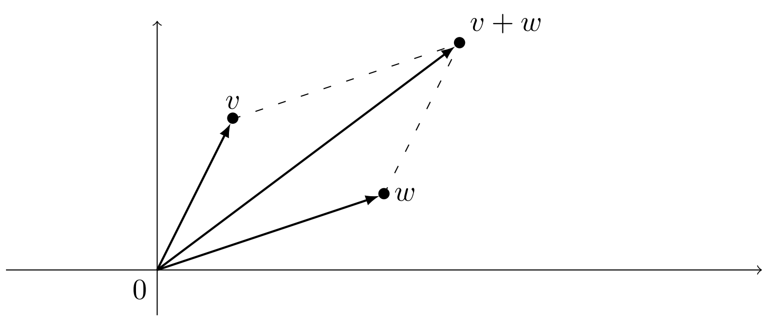


FIGURA 2.3. La somma di vettori e la regola del parallelogramma.

Ancora piú semplice è disegnare il prodotto di un vettore per uno scalare: moltiplicare v per il numero reale t vuol dire semplicemente "allungare" (quando $t > 1$) o "accorciare" il vettore (quando t è compreso fra 0 e 1) di un fattore t. Quando t è negativo, stiamo riflettendo v rispetto all'origine e lo stiamo allungando o accorciando, in particolare l'opposto di v è esattamente il vettore v riflesso rispetto all'origine. Naturalmente $0v$ è il vettore nullo, ossia l'origine, qualunque sia v.

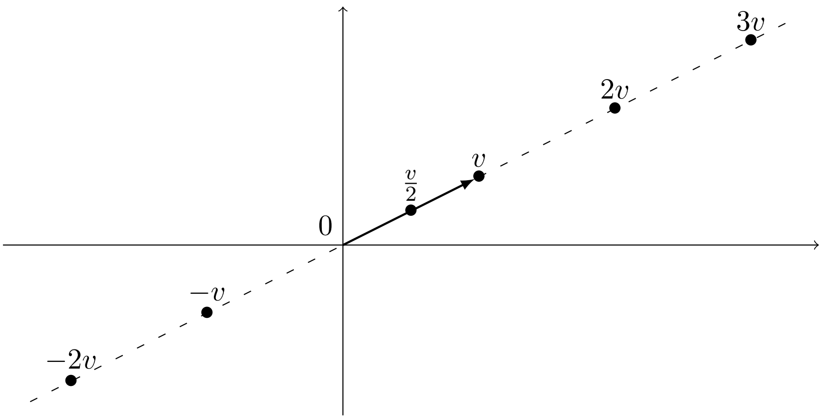


FIGURA 2.4.

Il modulo del vettore $v = (x, y)$ è semplicemente la lunghezza del vettore, ossia la distanza del punto (x, y) dall'origine:

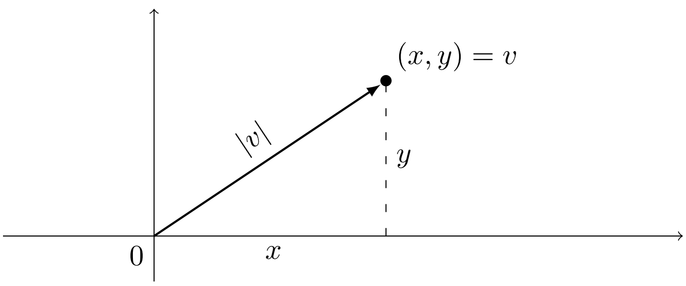


FIGURA 2.5.

Il prodotto scalare di vettori è meno semplice da visualizzare. Verifichiamo il fatto seguente: prendiamo un vettore $v = (x, y)$ non nullo, e consideriamo poi il secondo vettore $w = (-y, x)$. Basta un disegno (e un po' di geometria) per rendersi conto che i due vettori sono perpendicolari:

Se calcoliamo il prodotto scalare otteniamo subito $v \cdot w = -xy + yx = 0$. Questo vale in generale, ossia tutte le volte che il prodotto scalare di due vettori è uguale a zero, i due vettori sono perpendicolari. Allora introduciamo la definizione: due

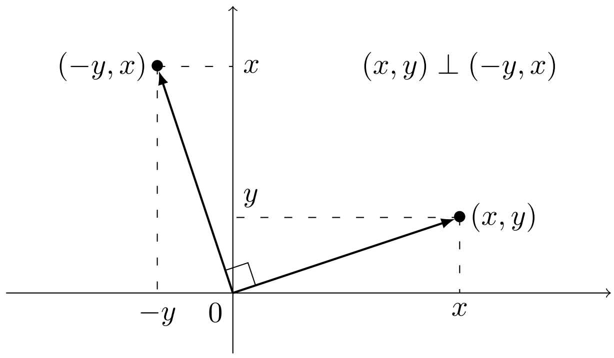


FIGURA 2.6.

vettori sono *ortogonali* (o *perpendicolari*) se il loro prodotto scalare si annulla. Si usa anche la notazione

$$v \perp w$$

per indicare il fatto che i vettori v e w sono ortogonali.

Notare che tutti i vettori sono ortogonali al vettore nullo!

Anche i vettori di $\mathbb{R}^3$ si possono visualizzare, anche se è un po' piú difficile, utilizzando i punti dello spazio. Nello spazio possiamo disegnare *tre* assi cartesiani ortogonali e procedendo come prima su $\mathbb{R}^2$ possiamo identificare ogni tripla (x, y, z) con un punto dello spazio.

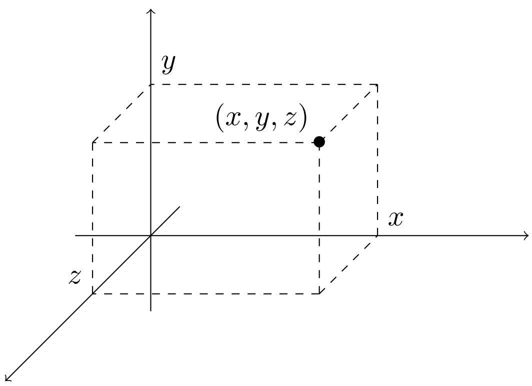


FIGURA 2.7.

Le operazioni fra vettori di $\mathbb{R}^3$ si possono visualizzare in modo simile a quello visto sopra per i vettori del piano.

Infine, è chiaro che tutti questi concetti si possono generalizzare ancora: possiamo definire $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5, \ldots$ e in generale i vettori di $\mathbb{R}^n$. Per questi vettori piú generali tuttavia non è possibile dare una raffigurazione intuitiva come nei casi del piano e dello spazio. A che servono direte voi? Be', secondo alcuni fisici teorici l'universo ha 10 dimensioni (tre spaziali, una temporale e altre sei della cui esistenza si accorgono solo le particelle subatomiche); secondo altri le dimensioni sono 11, mentre i più estremisti ne contano 26...

Esempio 1.3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $(1,3)$ che hanno modulo 2. In altri termini, cerchiamo dei vettori (x,y) tali che $(x,y)\cdot(1,3)=0$ e inoltre tali che $\sqrt{x^2+y^2}=2$: queste due relazioni ci danno il sistema (elevando al quadrato la seconda equazione)

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y \\ (-3y)^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y \\ y^2=\frac{2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\mp 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

cioè troviamo i due vettori opposti

$$\left(3\sqrt{\frac{2}{5}},-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Se interpretiamo graficamente il problema, è chiaro che i vettori del piano ortogonali ad un vettore fissato e di lunghezza fissata sono proprio due (e sono opposti).

Esempio 1.4. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ che sono multipli del vettore $(1,3)$ ed hanno modulo 6. Quindi stiamo cercando i vettori del tipo $t(1,3)=(t,3t)$, con t numero reale, che hanno modulo 6:

$$|(t,3t)|=6 \iff t^2+9t^2=36 \iff t^2=\frac{18}{5} \iff t=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}.$$

Abbiamo trovato soltanto due vettori:

$$\sqrt{\frac{18}{5}}(1,3)=\left(\sqrt{\frac{18}{5}},3\sqrt{\frac{18}{5}}\right) \quad \text{e} \quad -\sqrt{\frac{18}{5}}(1,3)=\left(-\sqrt{\frac{18}{5}},-3\sqrt{\frac{18}{5}}\right).$$

Esercizi.

Esercizio 2.1. Eseguire le seguenti operazioni:

$$(2,1)-(3,5)+3(4,-10); \qquad 2(1,0,-3)-10(2,2,1);$$
$$2(10,10,10)-3(1,-1,-1)+5(0,0,3).$$

Esercizio 2.2. Tra i seguenti vettori, alcuni sono ortogonali al vettore $(2,3)$. Quali sono?

$$(0,0); \quad (3,2); \quad (-2,-3); \quad (-3,-2); \quad (1,4); \quad (-5,0); \quad (3,-1).$$

Esercizio 2.3. Tra i seguenti vettori, alcuni sono ortogonali al vettore $(1,-1,5)$. Quali sono?

$$(0,1,2); \quad (5,5,0); \quad (2,3,7); \quad (0,0,0); \quad (-1,1,0); \quad (-5,0,-2); \quad (8,3,-1).$$

Esercizio 2.4. 1) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $(-1,-3)$ che hanno modulo 4.
2) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $(2,1)$ che hanno modulo 3.
3) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $(0,1)$ che hanno modulo 10.
4) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali sia a $(-1,1,0)$ che a $(0,1,-1)$ e che hanno modulo 4.

Esercizio 2.5. 1) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ che sono multipli del vettore $(-1, 1)$ ed hanno modulo 3.
2) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ multipli del vettore $(0, 4)$ che hanno modulo 10.
3) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ multipli del vettore $(-1, 1, 1)$ che hanno modulo 3.
4) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ multipli del vettore $(0, 3, 4)$ che hanno modulo 6.

Esempio 1.5. Per quali valori di t i vettori
$$(t, -t, t+1) \quad \text{e} \quad (-2t, 0, 3-t)$$
sono ortogonali?
Basta scrivere il prodotto scalare
$$(t, -t, t+1) \cdot (-2t, 0, 3-t) = -2t^2 + 0 + (t+1)(3-t) = -3t^2 + 2t + 3$$
e imporre che sia uguale a zero:
$$-3t^2 + 2t + 3 = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Esercizio 2.6. Per quali valori di t i vettori
$$(2t, t, -t) \quad \text{e} \quad (t+1, t-1, 5)$$
sono ortogonali?

2. Prodotto vettore

In fisica si usa spesso una operazione sui vettori di $\mathbb{R}^3$ detta il *prodotto vettore*. Il prodotto vettore di due vettori di $\mathbb{R}^3$ è ancora un vettore di $\mathbb{R}^3$ che si definisce nel modo seguente: dati due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ il loro prodotto vettore è dato da
$$v \wedge w = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1).$$
In fisica si usa spesso anche la notazione
$$v \times w = v \wedge w.$$
Notiamo tre proprietà importanti:
1) Il prodotto vettore $v \wedge w$ è *ortogonale* sia a v che a w: infatti basta calcolare il prodotto scalare
$$v \cdot (v \wedge w) = v_1 v_2 w_3 - v_1 v_3 w_2 + v_2 v_3 w_1 - v_2 v_1 w_3 + v_3 v_1 w_2 - v_3 v_2 w_1 = 0.$$
Verifica analoga per $w \cdot (v \wedge w) = 0$.
2) Se invertiamo l'ordine di v e w, il prodotto cambia di segno:
$$w \wedge v = (w_2 v_3 - w_3 v_2,\ w_3 v_1 - w_1 v_3,\ w_1 v_2 - w_2 v_1) = -v \wedge v.$$
3) Il prodotto vettore di un vettore per sé stesso è sempre uguale a zero
$$v \wedge v = (v_1, v_2, v_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$$
(verifica immediata). Anche il prodotto di un vettore v per un suo multiplo tv è uguale a zero, infatti
$$(tv) \wedge v = t(v \wedge v) = 0.$$

Esercizio 2.7. Calcolare i prodotti vettore
$$(1, 2, -3) \wedge (0, 1, 5); \qquad (1, 5, 5) \wedge (-1, 0, 1); \qquad (-1, -1, -1) \wedge (-2, -3, -1).$$

3. Richiami di trigonometria

La trigonometria in pratica si riduce allo studio di due funzioni seno e coseno, e alla loro applicazione alla geometria dei triangoli. Più avanti (nel Capitolo 3) studieremo qualche proprietà di tali funzioni dal punto di vista dell'analisi; qui ci limitiamo a ricordare qualche proprietà elementare e qualche applicazione geometrica.

Ricordiamo la costruzione geometrica delle funzioni $\sin x$, e $\cos x$. Consideriamo nel piano cartesiano la circonferenza unitaria, di centro l'origine O e di raggio 1. Chiamiamo A il punto $(1, 0)$ all'incrocio fra la circonferenza e l'asse delle ascisse. Se P è un punto sulla circonferenza, possiamo misurare l'ampiezza dell'angolo AOP con la lunghezza dell'arco di circonferenza $\widehat{AP}$; questo valore si dice la misura in *radianti* dell'angolo.

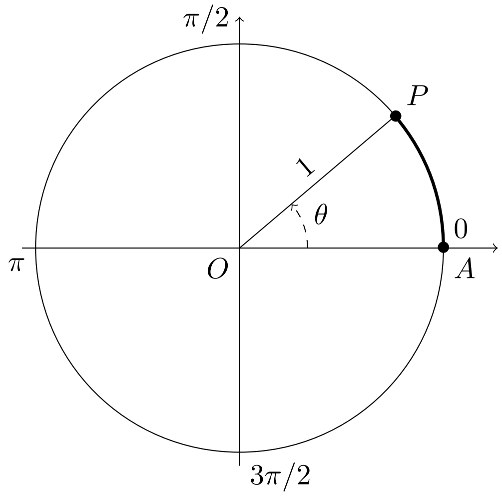


FIGURA 2.8. La misura in radianti dell'angolo θ è uguale alla lunghezza dell'arco di circonferenza $\widehat{AP}$.

Ad esempio si ha:

$$90° \text{ (a. retto)} = \frac{\pi}{2} \text{ radianti} \qquad 270° = \frac{3\pi}{2} \text{ radianti}$$

$$180° \text{ (a. piatto)} = \pi \text{ radianti} \qquad 360° \text{ (a. giro)} = 2\pi \text{ radianti}$$

$$45° = \frac{\pi}{4} \text{ radianti} \qquad 30° = \frac{\pi}{6} \text{ radianti} \qquad 60° = \frac{\pi}{3} \text{ radianti}$$

$$120° = \frac{2\pi}{3} \text{ radianti} \qquad 135° = \frac{3\pi}{4} \text{ radianti} \qquad 150° = \frac{5\pi}{6} \text{ radianti}$$

Possiamo adesso definire seno e coseno di un angolo espresso in radianti: dato un punto P sulla circonferenza unitaria, se s è la lunghezza dell'arco AP, il *seno* e il *coseno* di s sono esattamente l'ordinata e l'ascissa del punto P:

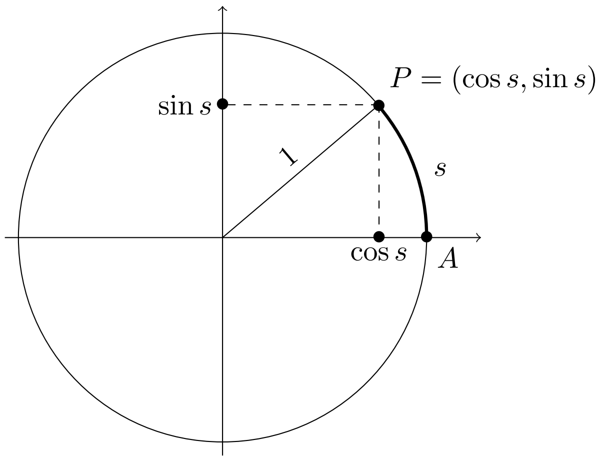


FIGURA 2.9. Coseno e seno di s sono le coordinate dell'immagine del punto $A = (1, 0)$ mediante una rotazione di s radianti in senso antiorario.

È facile verificare che

$$
\begin{aligned}
&\sin 0 = 0 && \cos 0 = 1\\
&\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin(30°) = \frac{1}{2} && \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} && \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} && \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(60°) = \frac{1}{2}\\
&\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(90°) = 1 && \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(90°) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2} && \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(120°) = -\frac{1}{2}\\
&\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(135°) = \frac{1}{\sqrt{2}} && \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(135°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin(150°) = \frac{1}{2} && \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\sin(\pi) = \sin(180°) = 0 && \cos(\pi) = \cos(180°) = -1\\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(270°) = -1 && \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos(270°) = 0.
\end{aligned}
$$

Quando il punto P è nella posizione di partenza A, l'angolo misura zero radianti. Se muoviamo P in senso antiorario, dopo un giro completo il punto ritorna nella posizione A, e allora l'angolo è di 2π radianti. Se continuiamo a muovere il punto in senso antiorario, l'angolo supera 2π e il punto P ripercorre le posizioni per le quali è passato nel primo giro. In particolare i valori di seno e coseno riassumono gli stessi valori dopo un giro completo:

$$\sin(s + 2\pi) = \sin s, \qquad \cos(s + 2\pi) = \cos s.$$

Le funzioni seno e coseno soddisfano numerose identità, ma qui ci limiteremo a ricordarne solo alcune: l'identità elementare, che segue dal Teorema di Pitagora,

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

le *formule di addizione*

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

e le proprietà di simmetria

$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \cos(-a) = \cos a.$$

Una proprietà molto importante mette in relazione il prodotto scalare di vettori con la funzione coseno. Infatti se v, w sono due vettori che formano un angolo α, vale l'identità

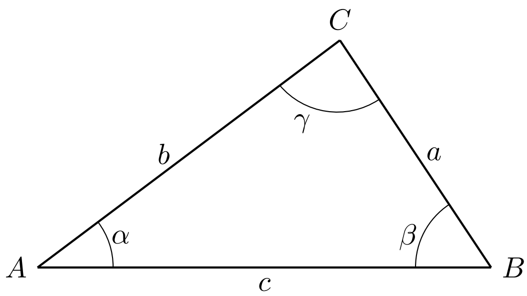
$$v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha$$

ossia il prodotto scalare dei vettori è uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo formato. Questa formula si può usare per calcolare l'angolo fra i due vettori nella forma

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{|v|\ |w|}$$

se v e w non sono nulli. In particolare ritroviamo il fatto che se v e w hanno prodotto scalare nullo allora l'angolo formato è un angolo retto (in quanto il coseno si annulla).

Concludiamo questi paragrafo richiamando due applicazione della trigonometria alla geometria dei triangoli. Consideriamo un triangolo di lati a, b, c e indichiamo con α l'angolo opposto al lato a, con β l'angolo opposto al lato b, e con γ l'angolo opposto al lato c.



La prima applicazione è il *Teorema di Carnot*: vale la formula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c\, \cos\alpha.$$

Si noti che se $\alpha = \pi/2$, ossia se il triangolo è rettangolo e a è l'ipotenusa, il teorema si riduce a $a^2 = b^2 + c^2$ vale a dire al Teorema di Pitagora.

La seconda applicazione è il *Teorema dei seni*: vale la formula

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Si noti che per un triangolo rettangolo, di ipotenusa a e cateti b, c, quindi in cui l'angolo $\alpha = \pi/2$, si ha più semplicemente

$$b = a \sin \beta, \qquad c = a \sin \gamma.$$

Esempio 3.1. Due lati di un triangolo sono lunghi 8 e 16, e l'angolo compreso è di $\pi/3$ radianti. Quanto è lungo il terzo lato?

Basta applicare il Teorema di Carnot:

$$c^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 64 + 256 - 256 \cdot \frac{1}{2} = 192$$

e quindi

$$c = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}.$$

Esempio 3.2. Durante una passeggiata (in pianura) cammino dal punto di partenza per 1 Km verso Nord, e poi per 2 Km verso Sud Est. A quanti Km di distanza in linea d'aria sono rispetto al punto di partenza?

Se chiamiamo A il punto di partenza, B il punto dove ho cambiato direzione, e C il punto di arrivo, sappiamo che il lato AB=c è lungo 1 Km, il lato BC=a è lungo 2 Km, e l'angolo ABC=β è di 45 gradi ossia $\pi/4$. Il problema chiede di determinare la lunghezza del terzo lato CA=b. Dal Teorema di Carnot vediamo che

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = 4 + 1 - 4 \cos(\pi/4) = 5 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = 2.17..$$

e quindi la soluzione è

$$b = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2.17..} = 1.47..$$

Esempio 3.3. Calcolare l'angolo formato dai vettori $v = (1, 0, 1)$ e $w = (5, 0, 5)$.

Abbiamo subito

$$v \cdot w = 5, \qquad |v| = \sqrt{2}, \qquad |w| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot w}{|v|\,|w|} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

e otteniamo che l'angolo fra i due vettori è di $\pi/6$ ossia 30 gradi.

4. Matrici

Un vettore si può pensare come un gruppetto di numeri reali disposti su una riga; nulla ci vieta di generalizzare questa idea e considerare dei numeri reali disposti su piú righe, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Questa si chiama una *matrice*. Nell'esempio abbiamo due righe e tre colonne, allora diciamo che la matrice è 2×3. In generale possiamo avere m righe ed n colonne; di solito una matrice si indica con una lettera maiuscola, e i suoi *elementi* (detti anche le *componenti* di A) si indicano con lettere minuscole con due indici. Ad esempio se la matrice A ha m righe ed n colonne, ossia è una matrice $m \times n$, possiamo scriverla cosí:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Una matrice si dice *quadrata* se ha lo stesso numero di righe e colonne, ossia quando è del tipo $n \times n$. Noi avremo a che fare molto spesso con matrici 2×2 o 3×3:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matrice *nulla* è una matrice di soli zeri (qualunque numero di righe e colonne); ecco una matrice 3×4 nulla:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche fra le matrici possiamo eseguire delle operazioni. Le piú semplici sono la somma di due matrici e il prodotto di una matrice per un numero; queste operazioni si fanno esattamente come nel caso dei vettori, ossia componente per componente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 5 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Un esempio di prodotto:

$$5 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 45 \\ -5 & 25 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Ma per le matrici possiamo definire una nuova operazione: il *prodotto fra matrici* detto anche *prodotto righe per colonne*. Questo prodotto non si può eseguire fra due matrici qualunque: date due matrici A e B, il prodotto AB si può eseguire solo quando il numero delle colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda, ossia A deve essere $m \times n$ e B deve essere $n \times k$; allora il risultato è una matrice $m \times k$. Il calcolo si esegue cosí: si considerano la prima riga di A e la prima colonna di B, che sono due vettori della stessa lunghezza, e si fa il loro prodotto scalare. Questo valore si scrive nell'angolo in alto a sinistra della matrice prodotto. Ad esempio, calcoliamo il prodotto una matrice 2×3 per una matrice 3×2, quindi il risultato è una matrice 2×2; prima riga per prima colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

perché $(2,1,3)\cdot(1,1,2)=2+1+6=9$. Poi calcoliamo il prodotto scalare della prima riga per la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ ? & ? \end{pmatrix},$$

poi seconda riga per prima colonna,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & ? \end{pmatrix},$$

e infine seconda riga per seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

In generale, per calcolare l'elemento c_{ij} del prodotto, cioè quello che si trova sulla riga i e sulla colonna j, basta moltiplicare la riga i della prima matrice per la colonna j della seconda matrice.

Notare che possiamo considerare anche matrici che hanno una sola riga ($1 \times n$) o una sola colonna ($m \times 1$), cioè dei vettori "riga" o vettori "colonna"; la regola del prodotto si applica anche in questo caso, e quindi possiamo tranquillamente calcolare il prodotto di una matrice per un vettore (se le dimensioni sono quelle giuste!). Ad esempio, possiamo calcolare il prodotto di una matrice 2×3 per una matrice (un vettore colonna) 3×1, e il risultato sarà una matrice 2×1 (ancora un vettore colonna)

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Il caso limite è quello delle matrici 1×1, che contengono soltanto un numero, e allora di solito non si scrivono le parantesi: $(5) = 5$. Se calcoliamo il prodotto di una matrice $1 \times n$ per una matrice $n \times 1$ stiamo semplicemente calcolando il prodotto scalare di un vettore riga per un vettore colonna, e il risultato è naturalmente un numero (una matrice 1×1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = 4.$$

Esercizio 2.8. Eseguire le seguenti operazioni fra matrici:

$$2\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.9 (⏭). Eseguire i seguenti prodotti fra matrici, dopo avere controllato che l'operazione sia possibile:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Il determinante di una matrice quadrata

Ad ogni matrice quadrata A si può associare un numero detto il suo *determinante*, che si indica con $\det A$. Spesso si usa anche la notazione

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{per indicare il determinante della matrice} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix},$$

ossia si usano delle sbarre verticali invece delle parentesi; attenzione, il determinante è un numero, non una matrice!

La regola per calcolare il determinante è semplice ma un po' lunga da spiegare. Anzitutto, per una matrice 1×1 non c'è nessun calcolo da fare:

$$\det(2) = 2, \qquad \det(a) = a$$

ossia il determinante è uguale all'unico elemento della matrice.

Per una matrice 2×2, il determinante si calcola con la regola seguente:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 9 = 3 + 9 = 12.$$

Per una matrice 3×3 il determinante si calcola con una regola che esprime il determinante tramite determinanti piú semplici (2×2). Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}.$$

Cerchiamo di capire la formula precedente. Abbiamo eseguito l'operazione detta *sviluppare il determinante rispetto alla prima riga*. Precisamente, abbiamo considerato uno alla volta i tre elementi sulla prima riga, $1, 9$ e 4; per ognuno di essi abbiamo considerato il determinante 2×2 che si ottiene cancellando la riga e la colonna corrispondenti, e l'abbiamo moltiplicato per il numero stesso:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 9 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \to \quad \begin{vmatrix} \mathbf{1} & * & * \\ * & 0 & -3 \\ * & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \to \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{9} & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \to \quad \begin{vmatrix} * & \mathbf{9} & * \\ 2 & * & -3 \\ 9 & * & 1 \end{vmatrix} \quad \to \quad 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & \mathbf{4} \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \to \quad \begin{vmatrix} * & * & \mathbf{4} \\ 2 & 0 & * \\ 9 & -5 & * \end{vmatrix} \quad \to \quad 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}.$$

Infine abbiamo rimesso insieme queste tre quantità secondo la regola: la prima, meno la seconda, piú la terza. Il risultato è il determinante 3×3 cercato. Naturalmente dobbiamo ancora finire di calcolare i determinanti 2×2 ottenuti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-15) - 9 \cdot 29 + 4 \cdot (-10)$$

e il risultato finale è -316.

Si può sviluppare anche rispetto alla seconda riga: il procedimento è identico, l'unica differenza sono i segni nell'ultimo passaggio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}$$

ossia per la seconda riga abbiamo usato la regola $-, +, -$ (mentre per la prima riga avevamo usato la regola $+, -, +$). Continuando il calcolo si ottiene

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 29 + 0 + 3 \cdot (-86) = -316.$$

Se sviluppiamo secondo la terza riga i segni da usare sono $+, -, +$ e si ottiene sempre lo stesso risultato. Ma si può anche sviluppare rispetto alla terza riga, oppure rispetto ad una colonna, e il risultato non cambia: basta usare la regola corretta per i segni:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dato che possiamo scegliere la riga o la colonna che preferiamo, chiaramente per abbreviare i calcoli è consigliabile sceglierne una che contenga molti zeri!

La regola per calcolare determinanti di matrici quadrate piú grandi $n \times n$ è esattamente la stessa: si sceglie una riga (o una colonna) qualunque, e si sviluppa il determinante rispetto a quella riga utilizzando i segni

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e in questo modo si riduce il calcolo a una somma in cui compaiono determinanti piú piccoli. Poi si sviluppa ciascuno dei determinanti piú piccoli e ci si riduce a determinanti ancora piú piccoli, e cosí via fino a che non si arriva a determinanti 2×2. Non facciamo esempi di questi calcoli perché noi ci limiteremo a calcolare determinanti 3×3 al massimo.

Esercizio 2.10 (⏭). Calcolare i determinanti delle seguenti matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Sistemi lineari: il Teorema di Cramer

Un *sistema lineare* 2×2 è un sistema di due equazioni in due incognite, che di solito si indicano con x e y, in cui le incognite compaiono solo in polinomi di grado 1. Ad esempio,

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$$

è un sistema lineare 2×2. *Risolvere* il sistema vuol dire trovare tutti i valori di x e y che verificano entrambe le equazioni. Ogni coppia (x, y) di valori che soddisfano le equazioni si chiama una *soluzione* del sistema. Il metodo piú semplice e generale per risolvere il sistema è quello di sostituzione: si ricava una incognita, ad esempio x, dalla prima equazione, e si sostituisce nella seconda:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ 5x + 7\left(\frac{3}{2}x - 2\right) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ x = \frac{32}{31}. \end{cases}$$

In questo modo nella seconda equazione resta solo una incognita che si può calcolare, e sostituendo il valore ottenuto si ottengono i valori di tutte e due le incognite:

$$\iff \begin{cases} y = \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{31} - 2 = -\frac{14}{31} \\ x = \frac{32}{31}. \end{cases}$$

Il metodo di sostituzione funziona benissimo anche per sistemi piú grandi. Ad esempio un sistema lineare 3×3 è un sistema di tre equazioni in tre incognite che di solito si indicano con x, y, z:

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 4. \end{cases}$$

Per risolverlo ricaviamo ad esempio x dalla prima e sostituiamo nelle altre, poi ricaviamo y dalla seconda e sostituiamo nella terza; in questo modo nella terza equazione resta solo l'incognita z che si può calcolare; introducendo il valore ottenuto nella seconda equazione otteniamo il valore di y; infine, sostituendo i valori di y e z nella prima equazione otteniamo anche il valore di x. [La soluzione è $x = -3$, $y = -17/2$, $z = 31/2$]. Ma in generale non è detto che il procedimento funzioni, e il motivo è semplicissimo: ad esempio il seguente sistema

$$\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ -x + 4y = 3 \end{cases}$$

chiaramente non ha nessuna soluzione, ossia è un sistema *impossibile.* Se proviamo ad applicare il metodo di sostituzione ricavando x dalla prima e sostituendo nella seconda, otteniamo la relazione assurda $1 = 3$ (provate).

C'è anche un altro caso in cui può succedere qualcosa di strano. Se ad esempio consideriamo il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

vediamo subito che le due equazioni sono la stessa equazione (basta moltiplicare la prima per -1 e si ottiene la seconda). Quindi in realtà abbiamo due incognite e una sola equazione:

$$-x + y = 3$$

e il meglio che si può fare per risolvere è esprimere una delle due incognite in funzione dell'altra:

$$y = 3 + x.$$

Questo vuol dire che il sistema ha *infinite soluzioni* (si dice anche che è *indeterminato*): ossia, possiamo scegliere arbitrariamente il valore di x e determinare il corrispondente valore di y usando la relazione $y = 3 + x$. Per esempio, $x = 0$ e $y = 3$ è una soluzione; $x = -10$ e $y = -7$ è un'altra soluzione e così via. Possiamo anche dire sinteticamente che le soluzioni sono tutte le coppie della forma

$$(x, x + 3)$$

cioè appunto (x, y) con $y = 3 + x$. Che succede se applichiamo il metodo di sostituzione al sistema di partenza? Proviamo:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 + x \\ x - (3 + x) = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 + x \\ -3 = -3 \end{cases}$$

quindi arriviamo ad una identità che è sempre vera, qualunque sia il valore di x e y.

Allora, il metodo piú facile per scoprire se un sistema ha una sola soluzione, oppure è impossibile, oppure ammette infinite soluzioni (=è indeterminato) è il seguente: proviamo ad applicare il metodo di sostituzione; se al termine otteniamo una relazione assurda il sistema è impossibile; se si arriva ad una identità sempre vera ci sono infinite soluzioni; e negli altri casi il sistema ha una soluzione unica. Inoltre il metodo fornisce anche la soluzione (le soluzioni) del sistema.

Esercizio 2.11. Utilizzando il metodo di sostituzione, dire se i seguenti sistemi hanno soluzione unica, sono impossibili o hanno infinite soluzioni, e calcolare le soluzioni quando possibile:

$$\begin{cases} 6(x - 3y) + 2 = 3(2 - x + 8y) \\ 2(x - y) = 3 + 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y + 2x = 3 - 6x \\ 4y - 2(1 + x) = 6(1 - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3+2x \\ 2x-2y=-3+x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ -x+3z=1 \\ 2x+5y-z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z+6x=x+2y-2 \\ 2x-z=2+y \\ 3x-y+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+z=y \\ 2(x-y)=4 \\ x=2-z \end{cases}$$

C'è un secondo metodo per scoprire se un sistema ha una soluzione unica: basta applicare il Teorema di Cramer. Prima di enunciarlo introduciamo la seguente definizione: la *matrice dei coefficienti* di un sistema lineare è la matrice A che si ottiene scrivendo sulla prima riga i coefficienti delle incognite della prima equazione, sulla seconda riga i coefficienti della seconda equazione eccetera. Naturalmente prima di scrivere i coefficienti si devono riordinare le incognite e semplificare le equazioni:

$$\begin{cases} -2y+3x=4 \\ 5x+7(x+y)=2+3x \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-2y=4 \\ 5x+7y=2 \end{cases} \implies A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Quando una incognita manca il suo coefficiente è zero:

$$\begin{cases} -x+4y+2z=0 \\ 2x+z=1 \\ 2x-3y-z=4. \end{cases} \implies A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora enunciare il Teorema di Cramer:

Teorema 6.1 (Cramer parte prima)**.** *Un sistema di n equazioni in n incognite ha soluzione unica se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0.*

Il vantaggio del Teorema di Cramer è che non c'è bisogno di risolvere il sistema per sapere se la soluzione è unica; lo svantaggio è che, nei casi in cui il determinante si annulla, il teorema non ci permette di stabilire se il sistema è impossibile oppure ha infinite soluzioni. Vediamo qualche esempio:

$$\begin{cases} -x+4y+2z=0 \\ 2x+z=1 \\ 2x-3y-z=4. \end{cases} \implies A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det A = 1 \neq 0$$

quindi il sistema ha un'unica soluzione (e precisamente $x=14$, $y=17$, $z=-27$). Altro esempio:

$$\begin{cases} -x+4y+2z=0 \\ 2x+z=1 \\ x+4y+3z=4. \end{cases} \implies A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \det A = 0$$

quindi il sistema non ha soluzione unica; ma usando soltanto il Teorema di Cramer non riusciamo a stabilire se il sistema è impossibile oppure ha infinite soluzioni. Per stabilirlo dobbiamo provare a risolvere, e scopriamo che il sistema è impossibile.

Osservazione 6.2. Per completezza diciamo che il Teorema di Cramer ha anche una seconda parte: si tratta di una formula esplicita che ci permette di calcolare la soluzione unica (quando esiste) senza dovere applicare il metodo di sostituzione. Diamo l'enunciato nel caso di un sistema 3×3: consideriamo un sistema qualunque

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right. \tag{6.1}$$

e le seguenti matrici: la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

che conosciamo già, e le tre matrici che si ottengono sostituendo una colonna di A con la colonna dei numeri a secondo membro:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Allora si ha:

Teorema 6.3 (Cramer parte seconda)**.** *Quando il determinante di A è diverso da zero, l'unica soluzione del sistema è data dalle formule*

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \qquad z = \frac{\det A_3}{\det A}.$$

Questo risultato vale anche per sistemi $n \times n$: naturalmente avremo n matrici $A_1, \ldots, A_n$ ottenute in modo analogo, che ci permettono di calcolare i valori delle n incognite del sistema. Naturalmente il teorema vale anche nel caso dei sistemi 2×2, anche se questi sono talmente semplici da risolvere che certamente non è conveniente utilizzare il Teorema di Cramer; comunque, dato un sistema 2×2 qualunque

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array}\right. \tag{6.2}$$

anche in questo caso, quando il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, ossia quando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

possiamo scrivere subito l'unica soluzione del sistema tramite le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

e valgono le formule

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

7. Discussione di un sistema con parametro

Molto spesso è utile considerare delle equazioni in cui i coefficienti non sono fissati ma possono dipendere da un *parametro*. Incognite e parametri sono lettere che compaiono nell'equazione: siamo noi a decidere quale lettera rappresenta un'incognita e quale rappresenta un parametro. Per esempio, se si chiede di risolvere rispetto a x l'equazione

$$kx - 3 = 1 - 2k$$

allora stiamo considerando x come una incognita e k come un parametro; la soluzione allora è semplicemente

$$x = \frac{4-2k}{k} = \frac{4}{k} - 2.$$

Notare che per ogni valore del parametro si ottiene un'equazione diversa; quando risolviamo rispetto a x stiamo risolvendo tutte queste equazioni in un colpo solo. Quasi sempre prima di risolvere bisogna fare attenzione e *discutere* se ci siano valori del parametro che causano problemi. Ad esempio nell'equazione precedente, se $k = 0$ l'incognita x sparisce e l'equazione diventa $-3 = 1$ il che è assurdo (e infatti la soluzione che abbiamo scritto non è definita per $k = 0$). Quindi per risolvere correttamente dobbiamo dire: se $k \neq 0$, la soluzione è quella scritta sopra; quando $k = 0$ l'equazione è impossibile.

Esercizio 2.12. Discutere e risolvere le equazioni seguenti:

$$2kx + 3 = -7k - 6x; \qquad kx^2 + 2x - 5 = 0;$$
$$k(2-x) = (3k-1)x + 2; \qquad x^2 = (2k+1)(2x-1).$$

Se un sistema ha coefficienti numerici noti, il metodo piú semplice per risolverlo è senz'altro quello per sostituzione (almeno per sistemi 2×2 o 3×3). Ma se i coefficienti contengono un *parametro* k allora il Teorema di Cramer (parte prima) diventa essenziale. Vediamo un esempio. Consideriamo il sistema nelle incognite x e y

$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = 2k - 2 \end{cases} \tag{7.1}$$

contenente il parametro k. Il numero k è un numero reale qualunque, che non vogliamo ancora scegliere esplicitamente; in pratica, a seconda del valore che diamo a k otteniamo un diverso sistema di equazioni, e quindi in effetti stiamo considerando infiniti sistemi diversi contemporaneamente: ad esempio se scegliamo $k = 3$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

se scegliamo $k = -1$ otteniamo un sistema diverso, e cosí via.

Proviamo a discutere il sistema (7.1). Quando studiamo un sistema dipendente da un parametro, la prima operazione da fare è scrivere la matrice dei coefficienti. In questo caso abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}.$$

Poi applichiamo il Teorema di Cramer per scoprire i valori di k che possono darci problemi:

$$\det A = k^2 - 4; \qquad \det A = 0 \iff k^2 = 4 \iff k = \pm 2.$$

Ora sappiamo subito che per $k \neq \pm 2$ il sistema ha soluzione unica; per calcolarla utilizziamo il metodo di sostituzione, ed otteniamo

$$x = -\frac{2}{k+2}, \qquad y = 2\frac{k+1}{k+2}.$$

Restano da studiare i casi problematici $k = 2$ e $k = -2$.

Per $k = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

che chiaramente si riduce ad una sola equazione ed ha infinite soluzioni: semplificando,

$$x + y = 1 \iff y = 1 - x.$$

Per $k = -2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$$

e se proviamo a risolvere otteniamo (semplificando le due equazioni)

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 1 \\ x - (x+1) = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 1 \\ -1 = -3 \end{cases}$$

assurdo, ossia il sistema è impossibile.

Con lo stesso procedimento si discutono i sistemi 3×3. Ad esempio, proviamo a studiare il sistema

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y + kz = 2k \\ 2kx + 2ky + z = k - 1. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante

$$\det A = 4 - 4k^2$$

e si annulla per $k = \pm 1$. Per $k \neq \pm 1$ il Teorema di Cramer garantisce l'esistenza di una soluzione unica che calcoliamo con il metodo di sostituzione:

$$x = \frac{5k+2}{4(k+1)}, \quad y = -\frac{3(k+2)}{4(k+1)}, \quad z = \frac{2k-1}{k+1}.$$

Per $k = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + y \\ 3(2+y) + y + z = 2 \\ 2(2+y) + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + y \\ 4y + z = -4 \\ 4y + z = -4 \end{cases}$$

per cui il sistema ha infinite soluzioni espresse dalle relazioni

$$x = 2 + y, \quad z = -4 - 4y$$

(possiamo scegliere arbitrariamente y e calcolare i valori corrispondenti di x e z).

Infine per $k=-1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y-z=-2 \\ -2x-2y+z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2+y \\ 3(2+y)+y-z=-2 \\ -2(2+y)-2y+z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2+y \\ 4y-z=-8 \\ -4y+z=-6 \end{cases}$$

e vediamo che la seconda e la terza equazione sono incompatibili quindi il sistema è impossibile (se non riuscite a vederlo, provate a continuare il calcolo: ricavando z dalla seconda e sostituendo nella terza si ottiene $-8=-6$ il che è assurdo).

Un ultimo esempio: studiamo il sistema

$$\begin{cases} x-kz=1 \\ x-y=2 \\ kz-y=1. \end{cases}$$

In questo caso

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = -k+k=0$$

(sviluppando rispetto alla prima colonna ad esempio) e quindi il Teorema di Cramer non si applica per nessun valore di k. Proviamo allora a risolvere:

$$\begin{cases} x-kz=1 \\ x-y=2 \\ kz-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=kz+1 \\ kz+1-y=2 \\ kz-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=kz+1 \\ kz-y=1 \\ kz-y=1 \end{cases}$$

e pertanto il sistema ha infinite soluzioni che si possono esprimere ad esempio in funzione di z:

$$x=kz+1, \quad y=kz-1.$$

Esercizio 2.13 (⏭). Per ciascuno dei seguenti sistemi con un parametro k, calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, trovare per quali valori di k il sistema è impossibile e per quali valori di k ci sono infinite soluzioni.

$$a)\ \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-y=1 \\ 4x+kz=4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y=-k \\ 2x-kz=2 \\ x+z+ky=1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} kx+y+z=1 \\ y-z=2 \\ kx+2y=3 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x+2ky=0 \\ x+2y=1 \\ -z-4x-y=2 \end{cases}$$

Esercizio 2.14. Per ciascuno dei seguenti sistemi con un parametro k, calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, trovare per quali valori di k c'è una soluzione unica e calcolarla, quindi per gli altri valori di k determinare se ci sono infinite soluzioni (e calcolarle) oppure se il sistema è impossibile.

$$\begin{cases} kx+y=1 \\ -z-y=3 \\ ky+x=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+ky=k \\ x+kz=1 \\ -4x-4kz=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y-z=1 \\ x-2ky=0 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ kx + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - 2y = 1 \\ kx + 2y = -k \\ x - y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} z + 3y = 0 \\ x - y - kz = 1 \\ x - ky - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - kz = k \\ z - kx = y \end{cases} \quad \begin{cases} z - kx = 2 \\ z + kx = 1 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2ky = 1 \\ x + 2y = 1 \\ -z - 4x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = 2x - 4z \\ x + y = 2x - 3 \\ kx + ky + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - kz = k \\ 4x + 4z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} z + 4x = 1 - k \\ -x + 2y = k + 1 \\ z + 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - ky = k \\ kx - y = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - kz = k \\ y + 2kz = 4 - k \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ -x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx - 2ky = 1 \\ z - kx = 2 \\ 2z + 2y = -3k \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = k \\ kx + y = 2 \\ x + ky + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ kx + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ -z - y = 3 \\ ky + x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} ky - z = 1 \\ kx - y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ky + z = 2 \\ x - kz = -k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y - z = 1 \\ x - 2ky = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 = 2x - 4z \\ x + y = 2x - 3 \\ kx + ky + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

8. Rango di una matrice

Abbiamo già visto che cancellando alcune righe e alcune colonne da una matrice A si ottiene una matrice piú piccola; le matrici ottenute in questo modo si chiamano i *minori* di A. Naturalmente una matrice ha tantissimi minori: ad esempio la matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ha un solo minore 2×3 cioè la matrice stessa A (cancelliamo zero righe e zero colonne), ha tre minori 2×2 (cancellare la prima o la seconda o la terza colonna):

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ha sei minori 1×1 che sono semplicemente i sei elementi della matrice:

$$(1) \quad (0) \quad (5) \quad (-1) \quad (-3) \quad (3),$$

e poi ha due minori 1×3, sei minori 1×2 e tre minori 2×1.

Esercizio 2.15. Il numero dei minori di una matrice $n \times m$ è $(2^n - 1)(2^m - 1)$. Verificate la correttezza di questa formula per piccoli valori di n, m.

Ora ci interessano soltanto i *minori quadrati*: nel caso della matrice precedente abbiamo 3 minori 2×2 e 6 minori banali 1×1, e basta. Non possiamo avere minori piú grandi o piú piccoli di questi. Per definire il *rango* della matrice dobbiamo esaminare i suoi minori quadrati e vedere se ce ne sono che hanno determinante diverso da 0. Se una matrice ha almeno un minore $m \times m$ con determinante diverso da zero, mentre *tutti* i minori piú grandi (cioè $(m+1) \times (m+1)$) hanno determinante nullo, allora diciamo che la matrice *ha rango m*. Diciamo che una matrice nulla (cioè fatta di soli zeri) ha *rango zero*.

Notare che se abbiamo una matrice $m \times k$ oppure $k \times m$ con $m \leq k$, allora al massimo il rango può essere m, e al minimo 0. Vediamo un esempio pratico. La matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

ha soltanto minori quadrati 1×1 oppure 2×2, quindi il rango può essere soltanto 1 o 2; chiaramente il rango non è zero dato che la matrice non è nulla. Per calcolare il rango si parte dal massimo possibile cioè 2, e si scende finché non si trova un minore con determinante non nullo:

a) Il rango è uguale a 2? Vediamo se fra i minori 2×2 ce n'è qualcuno con determinante diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Tutti i minori 2×2 hannno determinante nullo: il rango non può essere 2, dobbiamo scendere. b) Il rango è uguale a 1? Certamente, infatti i minori 1×1 ossia gli elementi della matrice non sono tutti nulli. Fine del calcolo.

Altro esempio: calcoliamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

In questo caso i minori quadrati sono del tipo 3×3 (tutta la matrice), 2×2, oppure 1×1, quindi il rango può essere solo 1,2 o 3 (0 no perché la matrice non è nulla).

a) Il rango può essere 3? C'è un solo determinante da calcolare, ossia il determinante della matrice completa:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi il rango è piú piccolo di 3.

b) Il rango può essere 2? Certamente: basta prendere il minore 2×2 in alto a sinistra:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

e troviamo un minore con determinante non nullo. Conclusione: il rango della matrice è uguale a 2.

Esercizio 2.16. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&4&2\\2&-4&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&5\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}8&0&2\\6&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&3&2\\1&3&2\\2&6&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\\-1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&4&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&5&1\\6&6&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}8&3&2\\2&3&1\\6&0&1\end{pmatrix}$$

Esercizio 2.17. Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro k

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&k\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-k&4k&2k\\2&-4&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&5\\k-5&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}8&0&2\\6&1&1\\2&-1&k\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&-3&-2\\1&3&2\\2&6&k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k\\2k\\3k\end{pmatrix}$$

CAPITOLO 3

Funzioni di una variabile reale

Prima di tutto, un po' di terminologia. Immaginiamo di avere un insieme di numeri A, e che M sia uno di questi numeri: $M \in A$. Allora diciamo che il numero M è il *massimo* di A se è il piú grande di tutti: con una formula si scrive

$$M \geq a \qquad \forall a \in A$$

dove il simbolo $\forall$ significa "per ogni". Allo stesso modo, se il numero m dell'insieme A è il piú piccolo di tutti, diciamo che m è il *minimo* di A:

$$m \leq a \qquad \forall a \in A.$$

Attenzione: non tutti gli insiemi hanno massimo o minimo. Per esempio, l'intervallo

$$I = [1, 2[$$

ha sicuramente minimo, infatti il punto $m = 1$ è il piú piccolo dell'insieme; ma non ha massimo! Infatti il punto 2, che potrebbe essere il massimo, non appartiene all'intervallo ma sta fuori. In questo caso diciamo che 2 è l'*estremo superiore* dell'intervallo; questo vuol dire che tutti gli $x < 2$ vicini a 2 stanno nell'insieme I, ma il punto $x = 2$ non sta nell'insieme. Analogamente, l'intervallo

$$J =]-2, 5]$$

ha massimo $M = 5$, ma non ha minimo: il punto -2 si dice l'*estremo inferiore* di J, ma non è il minimo perché sta fuori dall'intervallo J. Naturalmente se c'è il massimo M allora M è anche l'estremo superiore; e allo stesso modo, se c'è il minimo m, allora m è anche l'estremo inferiore. C'è anche un altro caso in cui non ci sono massimo o minimo: l'insieme può essere *illimitato*. Ad esempio, la semiretta

$$I = [2, +\infty[$$

ha minimo $m = 2$ ma chiaramente non ha massimo M; infatti dato un qualunque valore M, dentro I possiamo sempre trovare dei numeri piú grandi di M. In questi casi diciamo per convenzione che l'estremo superiore di I è $+\infty$ (piú infinito). E la semiretta

$$J =]-\infty, 3[$$

invece? Vediamo che J non ha né massimo né minimo; l'estremo superiore è 3; sempre per convenzione, diciamo che l'estremo inferiore è $-\infty$.

Per indicare il massimo e il minimo di un insieme A si usano le notazioni

$$\max A, \qquad \min A;$$

mentre per indicare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme si scrive

$$\sup A, \qquad \inf A$$

e infatti spesso si dice "il sup di A" invece dell'estremo superiore (e "l'inf di A" invece dell'estremo superiore).

1. Il concetto di funzione

Dato un insieme di numeri reali A, una *funzione* f definita su A a valori reali è una "regola" che ad ogni numero x associa un valore $f(x)$. Per esempio: se scegliamo $A = [0, +\infty[$ l'insieme dei numeri positivi, possiamo definire su A la funzione radice di x

$$f(x) = \sqrt{x}$$

che ad ogni numero $x \in A$ associa il valore $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. L'insieme A su cui è definita la funzione si chiama il *dominio* di f, e per indicare che f è una funzione su A a valori reali si scrive

$$f \colon A \to \mathbb{R}.$$

Si scrive anche

$$x \mapsto f(x)$$

per indicare che f porta il valore x nel valore $f(x)$. Un altro esempio: se scegliamo

$$A = \{x \colon x \neq 2\}$$

cioè tutti i numeri reali tranne 2, su A possiamo definire la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

che ad ogni numero $x \in A$ associa il valore $\frac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$.

L'insieme di tutti i valori di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si chiama anche l'*immagine* di f e si indica con $f(A)$.

Il modo migliore per comprendere questi concetti è visualizzarli con un disegno. A questo scopo utilizziamo il piano cartesiano: sappiamo già che ogni coppia (x, y) si può rappresentare con un punto del piano su cui abbiamo disegnato due assi cartesiani. Per rappresentare una funzione $f \colon A \to \mathbb{R}$, procediamo cosí: per ogni numero $x \in A$ nel dominio, calcoliamo il valore $f(x)$, e poi disegnamo un punto corrispondente alla coppia $(x, y) = (x, f(x))$. Se ripetiamo questa operazione per tutti i numeri $x \in A$, alla fine i punti che abbiamo disegnato formeranno una curva che si chiama il *grafico* della funzione f:

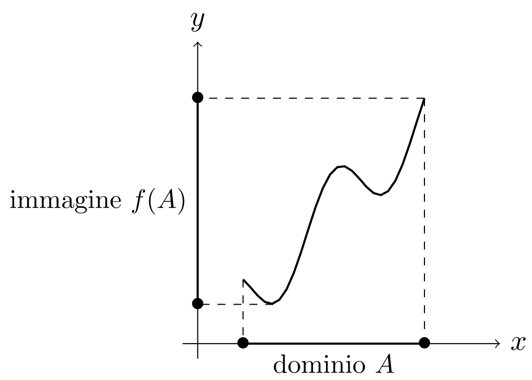


FIGURA 3.1.

Vediamo che se abbiamo disegnato il grafico di una funzione, è abbastanza facile visualizzare la sua immagine $f(A)$. Spesso, in modo sintetico, si parla del "grafico della funzione $y = f(x)$"; piú precisamente questo vuol dire "l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano dati da $(x, y) = (x, f(x))$ al variare di $x \in A$".

Quando abbiamo due funzioni f e g definite sullo stesso insieme A, possiamo definire subito la *somma* $f+g$ e il *prodotto* $f \cdot g$ delle due funzioni; naturalmente questo vuol dire rispettivamente $f(x) + g(x)$ e $f(x)g(x)$. Se g non si annulla, possiamo anche considerare la funzione *rapporto* $\frac{f}{g}$ ossia $f(x)/g(x)$. Per esempio:

$$f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad f+g = x^2 + \sqrt{x},\quad fg = x\sqrt{x},\quad \frac{f}{g} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}.$$

Inoltre, date due funzioni f e g, possiamo considerare la loro *composizione* che si indica con $g \circ f$ o anche con $g(f(x))$: la composizione si può fare quando i valori di f sono contenuti nel dominio di g, e corrisponde a "introdurre la funzione f dentro la funzione g". Per esempio:

$$f(x) = x^2,\quad g(x) = x+1 \quad \Longrightarrow \quad g(f(x)) = x^2 + 1;$$
$$f(x) = x+1,\quad g(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad g(f(x)) = (x+1)^2;$$
$$f(x) = x^3,\quad g(x) = \sqrt{2x-3} \quad \Longrightarrow \quad g(f(x)) = \sqrt{2x^3-3}.$$

Questo esempio mostra tra l'altro che le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ non è detto che siano uguali e possono essere diverse.

Per completare il quadro, un po' di terminologia. Una funzione si dice *iniettiva* se non assume mai due volte lo stesso valore: ossia, f iniettiva vuol dire

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{per} \quad x \neq y.$$

Se abbiamo a disposizione il grafico di f, è molto facile capire se f è iniettiva: se c'è una retta orizzontale che taglia il grafico in due punti distinti, allora f non può essere iniettiva, altrimenti lo è.

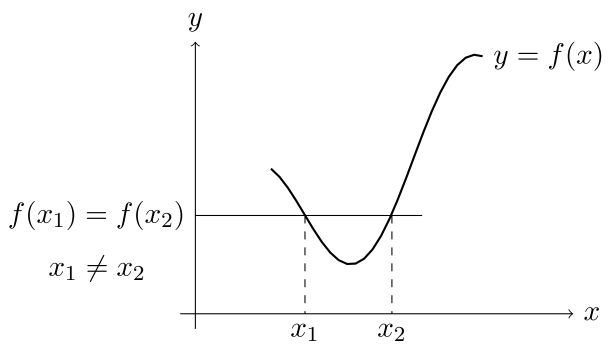


FIGURA 3.2. Esempio di funzione **non** iniettiva: esiste una retta orizzontale che interseca il grafico in due punti distinti.

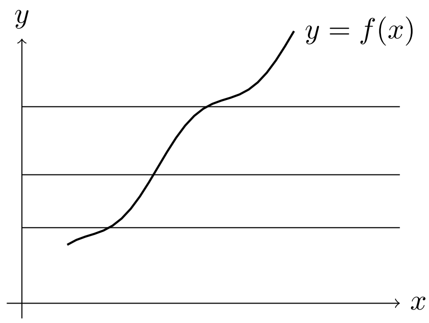


FIGURA 3.3. Esempio di funzione iniettiva: ogni retta orizzontale interseca il grafico in al più un punto.

Una funzione si dice *crescente* se ha la proprietà

$$x \le y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \le f(y)$$

ossia, se "spostandosi verso destra i valori della funzione aumentano". Notare che se la funzione non cresce ma resta costante, la precedente definizione si applica ancora; se invece vogliamo parlare di una funzione che non resta costante ma cresce effettivamente, allora dobbiamo definire una funzione *strettamente crescente* con la proprietà

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

con la disuguaglianza stretta. È facile riconoscere il grafico di funzioni crescenti:

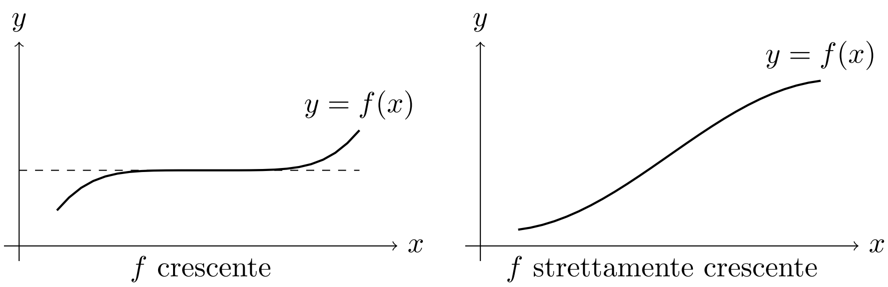


FIGURA 3.4.

Analogamente possiamo definire una funzione *decresente*:

$$x \le y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \ge f(y)$$

e una funzione *strettamente decrescente*:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y).$$

Notare che una funzione strettamente crescente o decrescente è sempre iniettiva; perché? (pensate al grafico...)

La maggior parte delle funzioni non è crescente o decrescente; il caso piú comune è quello di funzioni che su alcuni intervalli sono crescenti e su altri sono decrescenti. Ad esempio, la parabola $f(x) = x^2$ è decrescente sugli x negativi ossia su $A =$

$]-\infty, 0]$, mentre è crescente sugli x positivi ossia su $A = [0, +\infty[$. Allora parleremo di *intervalli di crescenza o decrescenza* della funzione f.

Infine, introduciamo il concetto di *funzione inversa.* Supponiamo di avere una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ iniettiva; quindi non assume mai due volte lo stesso valore, e se scegliamo un valore y nell'immagine, c'è un solo $x \in A$ tale che $f(x) = y$ (se ce ne fossero due, la funzione non sarebbe iniettiva!). Ma in questo modo abbiamo creato una nuova "regola", cioè una nuova funzione: ad ogni numero y nell'immagine di f associamo l'unico numero $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Questa nuova funzione si indica con f^{-1} e si chiama la *funzione inversa*: se f ha per dominio A e per immagine quindi $f(A) = B$, la funzione inversa ha per dominio B e per immagine A.

Se conosciamo il grafico di f, per disegnare il grafico di f^{-1} basta ribaltarlo rispetto alla bisettrice degli assi: infatti stiamo semplicemente scambiando il ruolo dell'asse delle ordinate e dell'asse delle ascisse.

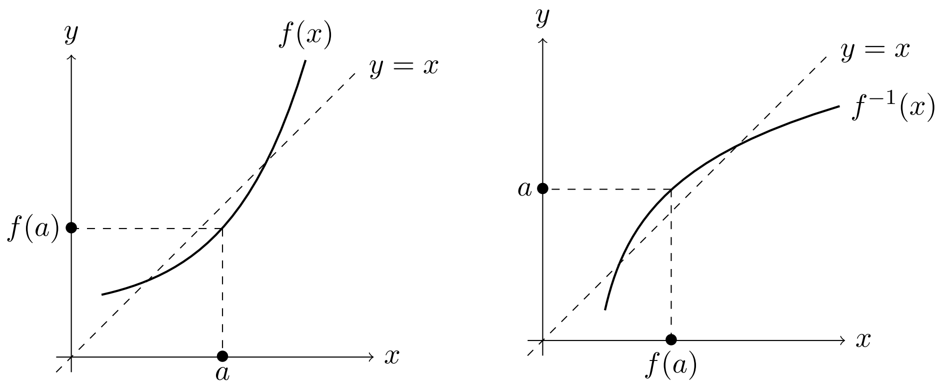


FIGURA 3.5. I grafici di f e f^{-1} si ottengono l'uno dall'altro per riflessione speculare rispetto all'asse $x = y$.

E per calcolare la funzione inversa? vediamo in pratica: se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = x^2$ sull'insieme dei numeri positivi $A = [0, +\infty[$, per calcolare la funzione inversa di f scriviamo $y = x^2$ e ricaviamo x in funzione di y: otteniamo $\sqrt{y}$, quindi la funzione inversa è la radice: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (ricordarsi di scambiare il ruolo di x e y!). Se vogliamo invertire la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+2},$$

scriviamo $y = f(x)$ e ricaviamo x in funzione di y:

$$y = \frac{1}{x+2} \implies x = \frac{1}{y} - 2$$

e quindi la funzione inversa è

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

Notiamo infine che se componiamo f con f^{-1} stiamo passando prima dal valore x al valore $f(x)$, e poi stiamo tornando indietro, quindi

$$f^{-1}(f(x)) = x;$$

e allo stesso modo

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Un'ultima definizione utile: data una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che

$$f \text{ è } \textit{pari} \text{ se } f(-x) = f(x)$$
$$f \text{ è } \textit{dispari} \text{ se } f(-x) = -f(x).$$

I grafici delle funzione pari e delle funzioni dispari sono facilmente riconoscibili: le funzioni pari sono quelle simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, mentre le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine:

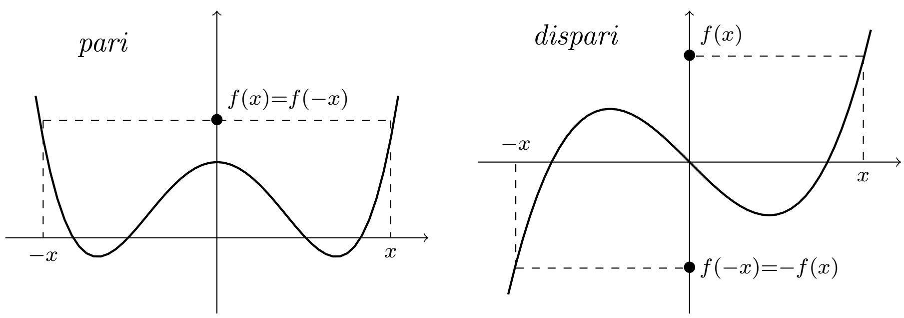


FIGURA 3.6.

Esercizi.

Esercizio 3.1. Determinare estremo superiore (sup), estremo inferiore (inf) e, se esistono, massimo e minimo dei seguenti insiemi:

$$[0,2]; \qquad]0,2]; \qquad [1,2] \cup [3,5[\ ; \qquad]-\infty,3] \cup]4,5[\ ; \qquad [-1,2] \cup]3,+\infty[\ .$$

Esercizio 3.2. Se $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, calcolare i valori

$$f(0), \quad f(1), \quad f(2), \quad f(3).$$

Esercizio 3.3 (▶▶|). Scrivere le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ quando

(1) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 3x.$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}, \quad g(x) = x + 1.$

(3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = 2x - 3.$

Esercizio 3.4. Scrivere la funzione inversa delle seguenti funzioni:

$$x^2 - 1; \qquad \frac{3}{5x-4}; \qquad \frac{x+1}{x-1}; \qquad 6 - 12x; \qquad 5 + \frac{2}{2-x}.$$

2. Le funzioni elementari

Alcune funzioni sono cosí importanti da meritare uno studio particolare: si tratta delle *funzioni elementari.* Esse sono le potenze, le funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente eccetera), la funzione esponenziale e il logaritmo.

Ricordiamo che per definire in modo preciso una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si devono assegnare due cose:
1) l'insieme di definizione A in cui varia x;
2) la regola $f(x)$ che permette di calcolare il valore di f in x.

Rette e parabole

Una funzione del tipo
$$f(x) = ax + b$$
con a e b costanti fissate, si chiama una *funzione lineare.* Chiaramente l'insieme di definizione dell'espressione $ax + b$ è tutto $\mathbb{R}$. Il grafico di f è una retta; il numero a si chiama il *coefficiente angolare* della retta ed esprime la pendenza della retta. Quando $a > 0$ la retta è crescente, quando $a < 0$ la retta è decrescente. Nel caso $a = 0$ la retta è orizzontale, e infatti la funzione si riduce alla funzione *costante* $f(x) = b$ che in tutti i punti assume sempre lo stesso valore:

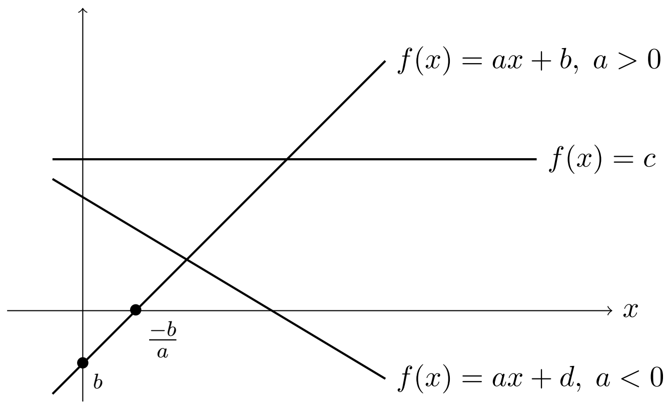


Figura 3.7. I grafici delle funzioni lineari sono delle rette nel piano.

Le funzioni lineari sono polinomi di grado 1 (o zero quando $a = 0$). Se consideriamo i polinomi di grado 2
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
con $a \neq 0$, abbiamo ancora delle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, il cui grafico è una *parabola.* La parabola è rivolta verso l'alto se $a > 0$, e verso il basso se $a < 0$. Abbiamo già discusso gli zeri della funzione $f(x)$ e la positività e negatività della parabola. Aggiungiamo che gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$ sono due: nel caso $a > 0$, abbiamo che $f(x)$ è decrescente per $x \le -\frac{b}{2a}$ e crescente per $x \ge -\frac{b}{2a}$; invece, quando $a < 0$, $f(x)$ è crescente per $x \le -\frac{b}{2a}$ e decrescente per $x \ge -\frac{b}{2a}$.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

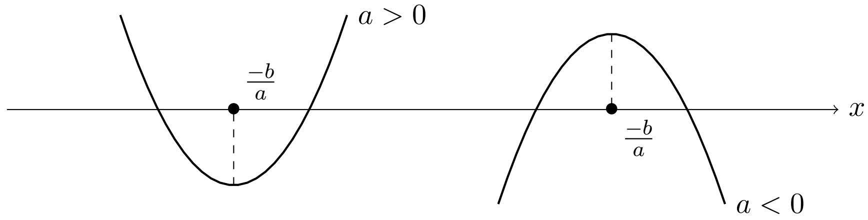


FIGURA 3.8. Il grafico della funzione quadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola con asse di simmetria verticale $x = -\frac{b}{a}$.

LE POTENZE.

Sappiamo bene che se x è un numero reale e $n \geq 1$ un intero positivo, con x^n si indica il prodotto

$$x^n = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \qquad n \text{ volte;}$$

inoltre per $x \neq 0$ si pone anche $x^0 = 1$, mentre la potenza 0^0 *non è definita.* Le potenze negative intere si definiscono semplicemente usando la regola

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Inoltre ricordiamo che se $x \geq 0$, con $\sqrt[n]{x}$ si indica la *radice n-esima* del numero x ossia l'unico numero positivo che elevato alla n dà come risultato x; si scrive anche

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Notare che quindi $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ è esattamente la funzione inversa di x^n:

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^n = x.$$

Ora se $x > 0$ sappiamo definire qualunque potenza del tipo $x^{\frac{p}{q}}$ dove $\frac{p}{q}$ è un numero razionale (cioè una frazione di due numeri interi p e q): basta porre

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Ma si può estendere ulteriormente questa definizione, e se $x > 0$ si può definire la potenza x^a dove a è un qualunque numero reale; valgono le solite regole

$$x^{a+b} = x^a x^b, \quad x^{ab} = (x^a)^b, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

eccetera.

Studiamo il grafico di queste funzioni. Le *potenze intere positive* $f(x) = x^n$ sono definite per ogni x ed hanno andamento diverso a seconda che n sia pari o dispari. Quando n è pari, abbiamo delle funzioni pari, ossia simmetriche rispetto all'asse delle ordinate:

Ad esempio $f(x) = x^2$ soddisfa

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Tutte queste funzioni hanno lo stesso andamento: sono decrescenti per $x \leq 0$ e crescenti per $x \geq 0$.

Invece le potenze x^n con n dispari sono funzioni dispari, ossia simmetriche rispetto all'origine:

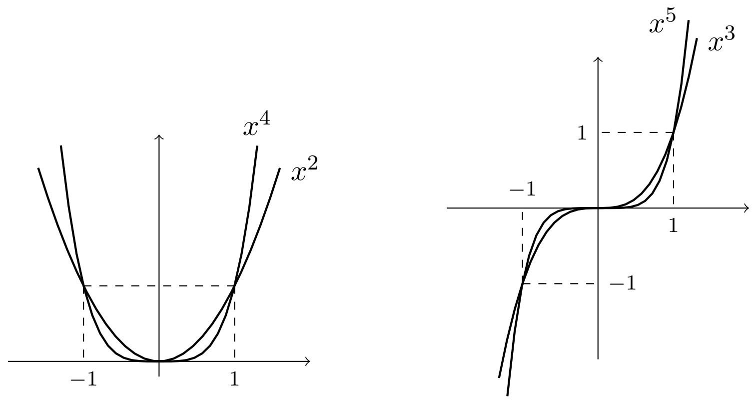


FIGURA 3.9. Grafici delle potenze intere di x.

Ad esempio $f(x) = x^3$ soddisfa

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Tutte queste funzioni hanno lo stesso andamento: sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora le potenze negative, ossia

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x = 1, 2, 3, \dots.$$

Le potenze negative sono definite solo per $x \neq 0$, e anche in questo caso dobbiamo distinguere n pari da n dispari. Se n è pari allora $\frac{1}{x^n}$ è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$. Invece, se n è dispari allora la funzione $\frac{1}{x^n}$ è sempre crescente.

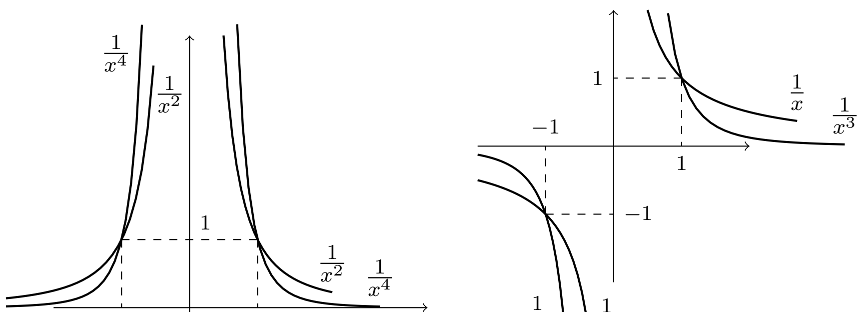


FIGURA 3.10. Grafici delle potenze intere negative di x.

Infine studiamo il grafico *potenze reali* x^a. Anche qui abbiamo due casi: quando $a > 0$, la funzione $f(x) = x^a$ è definita su $x \geq 0$, è strettamente crescente e positiva; in particolare quando $a = \frac{1}{n}$ otteniamo le *radici n-esime*, e quando a è intero riotteniamo le potenze; invece se $a < 0$ la funzione $f(x) = x^a$ è definita solo per $x > 0$, è strettamente decrescente e positiva:

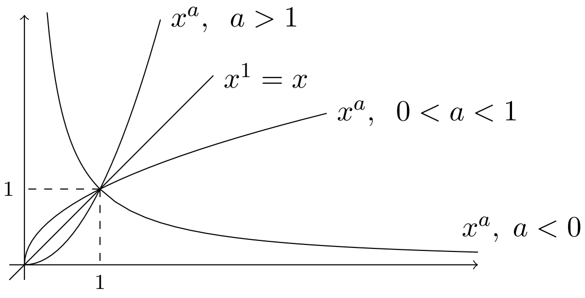


FIGURA 3.11. I grafici delle potenze reali di x.

LE FUNZIONI ESPONENZIALI

Se nella potenza reale a^b teniamo costante la base $a > 0$ e facciamo variare l'esponente, otteniamo le *funzioni esponenziali*

$$f(x) = a^x.$$

Queste funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, e il loro comportamento è molto semplice: esse sono sempre strettamente positive (non si annullano mai), inoltre

- quando $a > 1$ la funzione esponenziale è strettamente crescente;
- quando $0 < a < 1$ la funzione esponenziale è strettamente decrescente;
- e naturalmente quando $a = 1$ otteniamo la funzione costante $f(x) = 1^x = 1$.

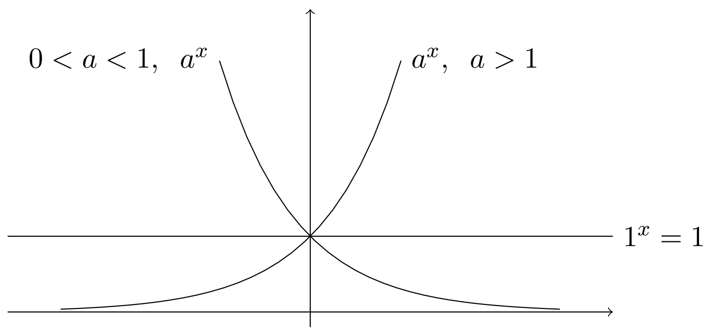


FIGURA 3.12. I grafici delle funzioni esponenziali.

Notare che tutte le funzioni esponenziali valgono 1 per $x = 0$, infatti $a^0 = 1$. Se ora disegnamo la retta $g(x) = 1 + x$, notiamo che anch'essa passa per il punto $(0, 1)$ in cui si incrociano tutte le curve precedenti. È possibile dimostrare che soltanto una delle curve esponenziali sta tutta sopra questa retta (ed è tangente, mentre tutte le altre la tagliano): ciò accade quando la base ha il valore

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

che si chiama la *costante di Nepero.* In altri termini

$$\boxed{\text{la costante } e \text{ è l'unico numero reale tale che } e^x \geq 1 + x \text{ per ogni } x.}$$

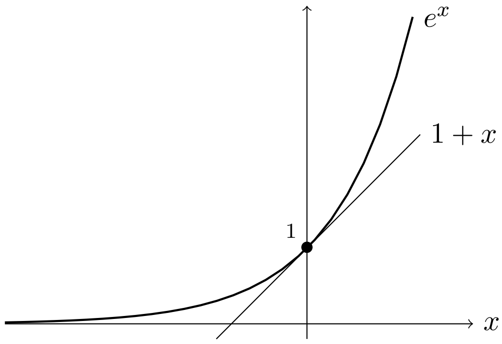


FIGURA 3.13. Visualizzazione grafica della proprietà fondamentale del numero e.

È inoltre possibile dimostrare che e non è un numero razionale[1] e quindi il suo sviluppo decimale è infinito e non periodico. La funzione esponenziale corrispondente

$$f(x) = e^x$$

è importantissima, tanto che di solito si chiama semplicemente *l'esponenziale.*

Il logaritmo.

Come abbiamo visto, la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è strettamente crescente, quindi iniettiva, e possiamo considerare la corrispondente funzione inversa. Il grafico si ottiene semplicemente ribaltando rispetto alla bisettrice degli assi quello di e^x:

---

[1]È facile trovare dei numeri razionali che approssimano e. Infatti se n è un numero intero positivo, elevando alla n-esima potenza le relazioni $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$ ed $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ si ottengono le disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

che per n molto grande danno buone approssimazioni di e: ad esempio, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \simeq 2,7181, \qquad \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4+1} \simeq 2,7185\ .$$

Per una migliore approssimazione del numero di Nepero rimandiamo il lettore all'Esercizio 5.20.

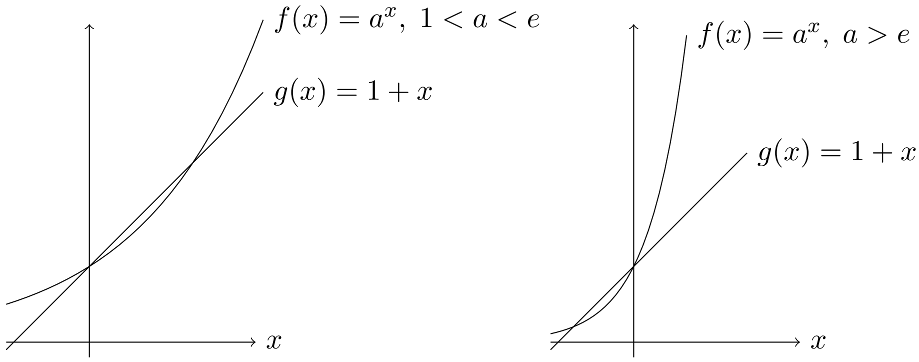


FIGURA 3.14. Il grafico di a^x quando $a \neq e$.

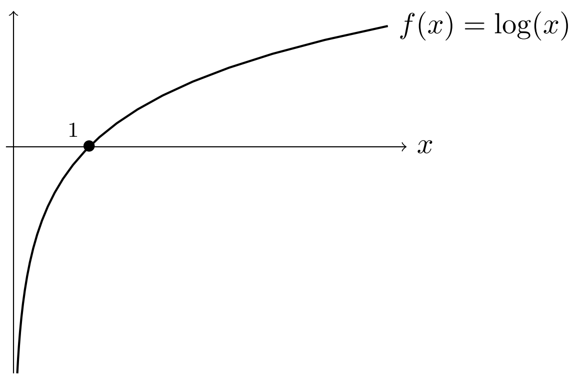


FIGURA 3.15. Grafico della funzione $\log(x)$

La funzione cosí ottenuta si chiama *logartimo (naturale)* e si indica con $\log x$. Dato che $\log x$ è l'inversa di e^x valgono le proprietà

$$e^y = x \iff y = \log x$$

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0, \qquad \log(e^x) = x \quad \forall x$$

che useremo spesso. Dalle proprietà dell'esponenziale otteniamo subito le seguenti proprietà della funzione logaritmo:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^b) = b \log a \qquad \log 1 = 0, \qquad \log e = 1.$$

Inoltre l'insieme di definizione di $\log x$ (che coincide con l'immagine di e^x) è la semiretta positiva $x > 0$:

$$\log x \text{ è definito solo per } x > 0,$$

e la funzione $\log x$ è strettamente crescente.

LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE.

Riprendiamo qui i richiami sulle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$ già in gran parte riportati nel primo capitolo, integrandoli con qualche proprietà delle funzioni dal punto di vista dell'anaisi. Consideriamo nel piano cartesiano la circonferenza unitaria, di centro l'origine O e di raggio 1. Chiamiamo A il punto $(1, 0)$ all'incrocio fra la circonferenza e l'asse delle ascisse.

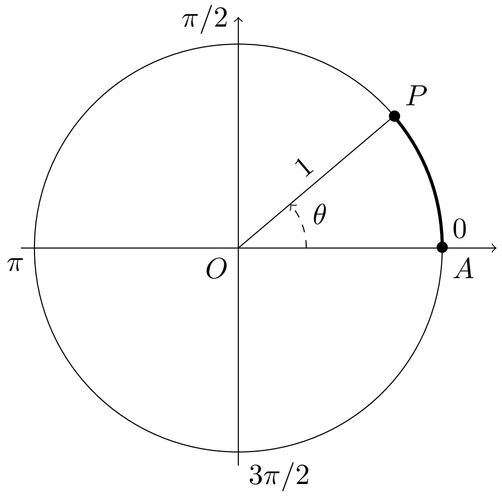


FIGURA 3.16. La misura in radianti dell'angolo θ è uguale alla lunghezza dell'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AP}$.

Ora, se P è un punto sulla circonferenza, possiamo misurare l'ampiezza dell'angolo AOP con la lunghezza dell'arco di circonferenza AP. Ad esempio, se AOP è un angolo di 90°, l'arco sarà lungo $\frac{\pi}{2}$, se l'angolo è di 180° l'arco sarà lungo π e cosí via. Diciamo allora che stiamo misurando gli angoli in *radianti*: un angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ radianti eccetera.

Allora, se P è un qualunque punto sulla circonferenza unitaria, e se s è la lunghezza dell'arco AP, il *seno* e il *coseno* di s sono esattamente l'ordinata e l'ascissa del punto P:

Dal Teorema di Pitagora otteniamo subito la relazione

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1.$$

È facile verificare che

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \sin \pi &= 0, & \cos \pi &= -1 \\ \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) &= -1, & \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Inoltre si ha anche

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

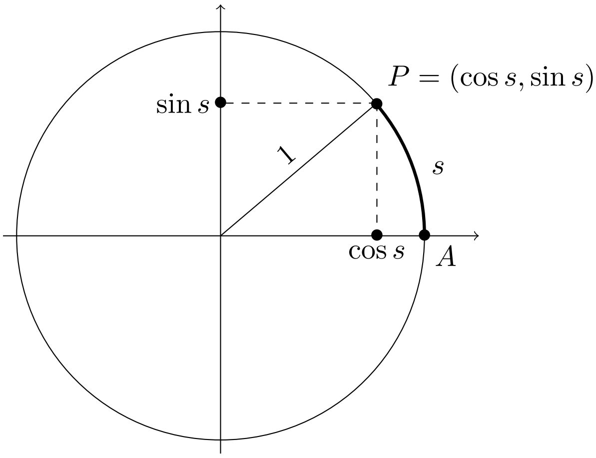


FIGURA 3.17. Coseno e seno di s sono le coordinate dell'immagine del punto $A = (1, 0)$ mediante una rotazione di s radianti in senso antiorario.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quando il punto P è nella posizione di partenza A, l'angolo misura zero radianti. Se muoviamo P in senso antiorario, dopo un giro completo il punto ritorna nella posizione A, e allora l'angolo è di 2π radianti. Se continuiamo a muovere il punto in senso antiorario, l'angolo supera 2π e il punto P ripercorre le posizioni per le quali è passato nel primo giro. In particolare i valori di seno e coseno riassumono gli stessi valori dopo un giro completo:

$$\sin(s + 2\pi) = \sin s, \qquad \cos(s + 2\pi) = \cos s.$$

Le funzioni che hanno questa proprietà si dicono *periodiche*, e precisamente una funzione tale che

$$f(x + T) = f(x)$$

per tutti gli x si dice *periodica di periodo T*, o *T-periodica.* Quindi seno e coseno sono funzione 2π-periodiche.

Il grafico delle due funzioni è il seguente:

Ricordiamo qualche altra proprietà importante: le funzioni seno e coseno sono sempre comprese fra -1 e $+1$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Inoltre valgono le *formule di addizione*

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

e dal grafico delle due funzioni è facile capire che

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

La funzione seno è *dispari*, mentre la funzione coseno è *pari*:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = x.$$

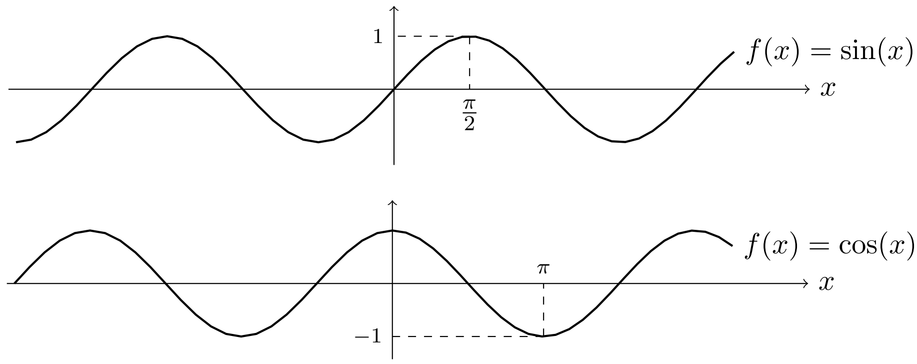


FIGURA 3.18. Grafico delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Gli zeri del seno sono i punti del tipo $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$:

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

mentre gli zeri del coseno sono i punti del tipo $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots$:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ricordiamo poi che la funzione *tangente* è data da

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

e naturalmente non è definita quando il denominatore si annulla, ossia

$$\text{il dominio di } \tan x \text{ è dato da } x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione $\tan x$ è periodica di periodo π ed è dispari. Il suo grafico è disegnato in Figura 3.19:

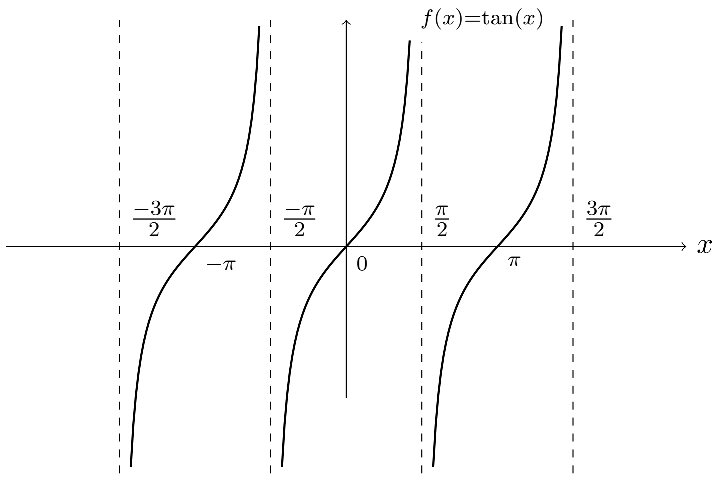


FIGURA 3.19. Grafico della funzione tangente.

È facile dare un'interpretazione geometrica della tangente. Prendiamo un punto P sulla circonferenza unitaria come nella Fig. 3.20, e consideriamo il triangolo rettangolo OPB; sappiamo che OB è il coseno dell'arco $s = AP$, mentre PB è il seno di s.

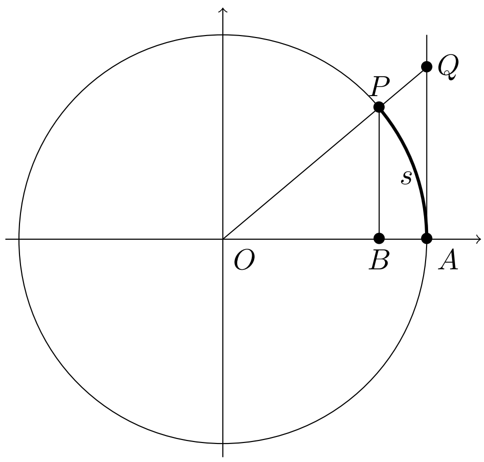


Figura 3.20. Il raggio della circonferenza è $OA = 1$. Per il teorema di Talete si ha
$$AQ = \frac{AQ}{AO} = \frac{BP}{BO} = \frac{\sin s}{\cos s} = \tan s.$$

Dalla similitudine dei triangoli OPB e OQA vediamo subito che AQ rappresenta proprio la tangente di s.

Vediamo anche che se P sta nel primo quadrante, l'area della sezione di cerchio OAP è uguale a $s/2$, quella del triangolo OAP è uguale a $(\sin s)/2$, mentre quella del triangolo OAQ è $(\tan s)/2$; ne segue che per $0 \leq s < \pi/2$ valgono le disuguaglianze

$$\text{segmento } PB \leq \text{ arco } PA \leq \text{ segmento } QA \tag{2.1}$$

ossia
$$0 \leq \sin s \leq s \leq \tan s \qquad \text{per } \ 0 \leq s < \frac{\pi}{2}.$$
Dato che $\sin s$ e $\tan s$ sono funzioni dispari, la disuguaglianza vale in senso inverso per $-s$:
$$\tan s \leq s \leq \sin s \leq 0 \qquad \text{per } \ -\frac{\pi}{2} \leq s \leq 0.$$
Possiamo riassumere queste disuguaglianze in una sola:
$$|\sin s| \leq |s| \leq |\tan s| \qquad \text{per } \ |s| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Per finire, osserviamo che le funzioni seno, coseno e tangente non sono iniettive, quindi non si può definire la funzione inversa; ma se consideriamo solo un tratto crescente (o decrescente) di queste funzioni, allora otteniamo delle funzioni iniettive e possiamo invertirle. Ad esempio, la funzione
$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x$$

è crescente, la sua funzione inversa si chiama *arcoseno* e si indica con $\arcsin x$:
La funzione

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos x$$

è decrescente, la sua funzione inversa si chiama *arcocoseno* e si indica con $\arccos x$:

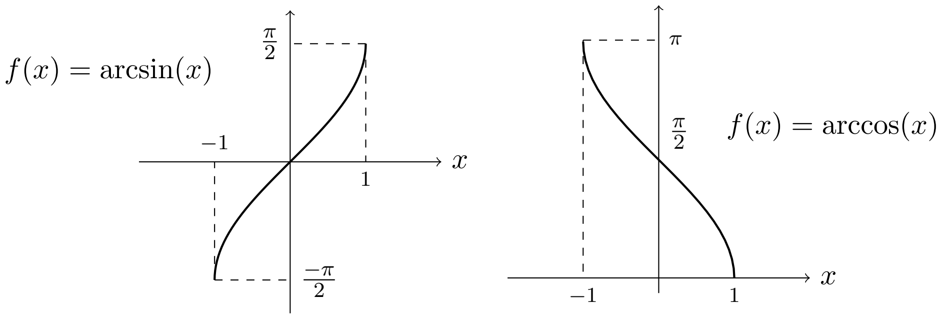


FIGURA 3.21. Grafici delle funzioni arcoseno e arcocoseno.

Infine, la funzione

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \tan x$$

è crescente, la sua funzione inversa si chiama *arcotangente* e si indica con $\arctan x$:

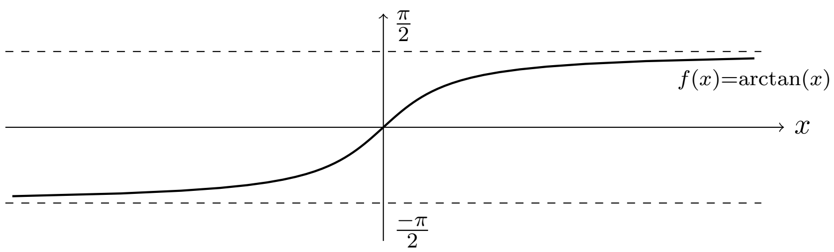


FIGURA 3.22. Grafico della funzione arcotangente.

Notiamo che $\arctan x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, strettamente crescente, e compresa fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

Spesso sarà utile considerare delle funzioni definite a tratti, ossia utilizzando espressioni diverse su intervalli diversi: ad esempio, possiamo definire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0, \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

La riconoscete? questa è seplicemente la funzione *valore assoluto* (modulo), il cui grafico è il seguente:

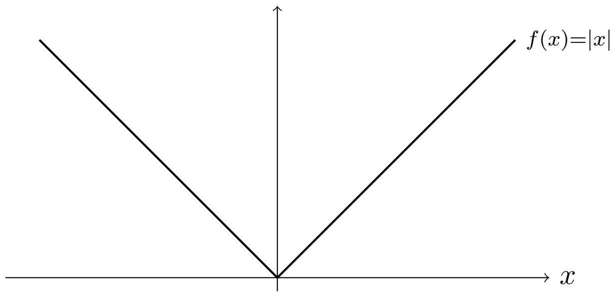


FIGURA 3.23. Grafico della funzione $|x|$.

Un altro esempio è la funzione segno di x:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

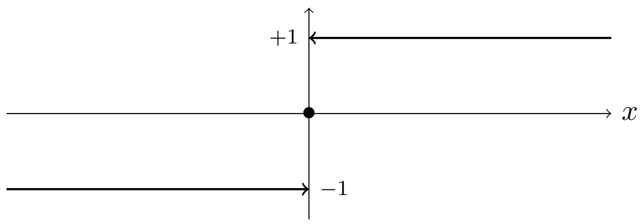
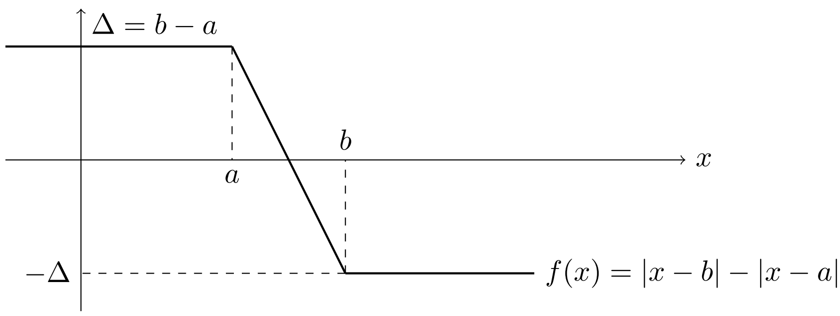


FIGURA 3.24. Grafico della funzione $\mathrm{sgn}(x)$.

Esempio 2.1. Siano a, b due numeri reali, con $a < b$, e studiamo la funzione $f(x) = |x-b| - |x-a|$. Si tratta chiaramente di una funzione lineare a tratti, e infatti, indicando con $\Delta = b - a$ si ha:

$$f(x) = \begin{cases} (b-x)-(a-x) = \Delta & \text{se } x \leq a, \\ (b-x)-(x-a) = b+a-2x = \Delta - 2(x-a) & \text{se } a \leq x \leq b, \\ (x-b)-(x-a) = -\Delta & \text{se } b \leq x\ . \end{cases}$$

Il suo grafico è uguale a



3. Limiti di funzioni

Introduciamo ora il concetto di *limite di una funzione in un punto.* Si tratta dell'idea seguente: se abbiamo assegnato una funzione f su A sappiamo calcolare i valori $f(x)$ corrispondenti ai numeri $x \in A$. Immaginiamo ora di far variare il punto x e di muoverlo avvicinandoci ad un punto x_0 fissato, e seguiamo i valori corrispondenti $f(x)$. Se siamo fortunati, quando x si avvicina ad x_0 anche i valori $f(x)$ si avvicinano ad un valore L; allora diciamo che L è il limite di f nel punto x_0. Notare che non ci interessa il valore di f proprio in quel punto: stiamo solo studiando il comportamento dei valori $f(x)$ quando ci avviciniamo a x_0. Naturalmente possiamo avvicinare x a x_0 da destra o da sinistra, o da tutti e due i lati.

Ecco le definizioni precise:

Definizione 3.1. Sia $f\colon]x_0, b[\to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f *ha limite destro* L *in* x_0 (o che f *tende a* L *da destra in* x_0) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

o anche

$$f(x) \to L \quad \text{per} \quad x \to x_0^+.$$

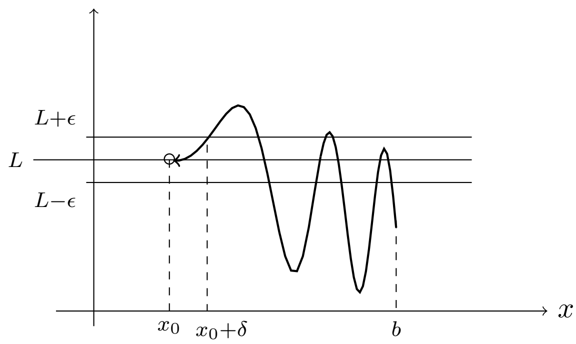


FIGURA 3.25. Limite per $x \to x_0^+$.

Definizione 3.2. Sia $f\colon]a, x_0[\to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f *ha limite sinistro L in x_0* (o che f *tende a L da sinistra in x_0*) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad x_0 - \delta < x < x_0.$$

Si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

o anche

$$f \to L \quad \text{per} \quad x \to x_0^-.$$

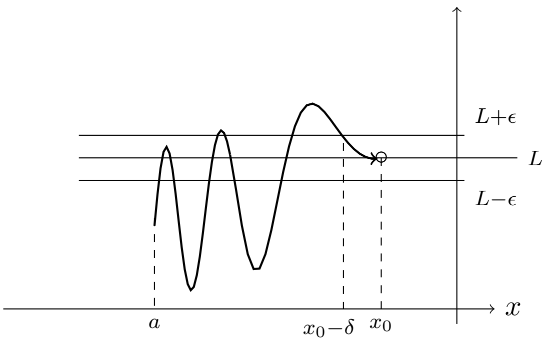


FIGURA 3.26. Limite per $x \to x_0^-$.

Definizione 3.3. Si dice che f *ha limite L in x_0* (o che f *tende a L in x_0*) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

o anche

$$f \to L \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Osservazione 3.4. Si possono verificare vari casi: una funzione f può non avere limiti in un punto x_0; può avere limite da destra ma non da sinistra, e viceversa; oppure può avere limite sia da destra che da sinistra. In quest'ultimo caso, i due limiti possono essere uguali o diversi; quando sono uguali, allora esiste anche il limite di f in x_0.

In altri termini: dire che f tende a L in x_0 equivale a dire che f tende a L sia da destra che da sinistra!

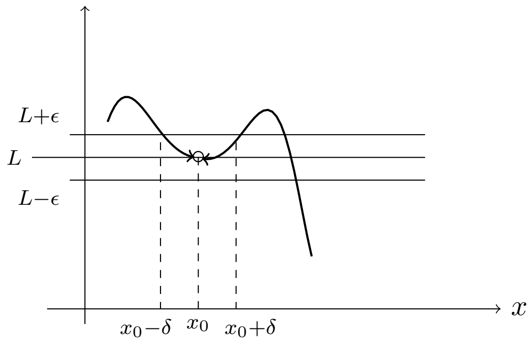


FIGURA 3.27. Limite per $x \to x_0$.

Osservazione 3.5. Attenzione: nelle definizioni precedenti non ci interessa sapere quanto vale la funzione f nel punto x_0 in cui calcoliamo il limite; ci interessano solo i valori $f(x)$ per x vicino a x_0. Vediamo un esempio semplicissimo: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

vale 0 in tutti i punti vicini all'origine, ma nell'origine vale 1. Quindi il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ per $x \to 0$ sono uguali a 0, e quindi anche il limite di $f(x)$ in 0 è uguale a 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Notare che invece il valore di f in 0 è $f(0) = 1$.

Esempio 3.6. La funzione segno di x è definita cosí:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

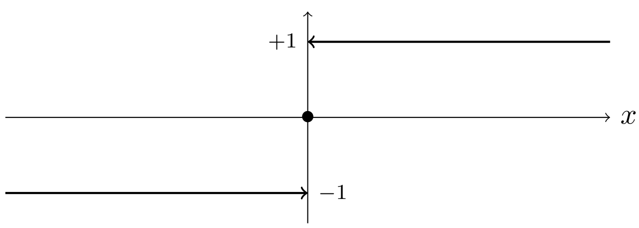


FIGURA 3.28.

Allora si ha subito

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,$$

ossia il limite destro e il limite sinistro sono diversi. Quindi

$$\text{il } \lim_{x\to 0} f(x) \text{ non esiste.}$$

Esempio 3.7. Proviamo a calcolare il limite della funzione $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 3$ (se esiste!)

$$\lim_{x\to 3} x^2 = L = ?$$

Vogliamo far vedere che il limite esiste e vale esattamente 9. Ricordando la definizione, dobbiamo mostrare che: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x^2 - 9| < \epsilon \quad \text{per} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Fissato ϵ, come dobbiamo scegliere δ? Anzitutto prendiamolo piccolo: se $\delta < 1$ si ha

$$|x - 3| < \delta \implies |x - 3| < 1 \implies 2 < x < 4 \implies |x + 3| < 7.$$

Ma non basta ancora; prendiamo δ ancora piú piccolo, ad esempio $\delta = \epsilon/8$; allora possiamo scrivere

$$|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < \frac{\epsilon}{8} \cdot 7 < \epsilon$$

e ora siamo riusciti a dimostrare la tesi.

Notare che in questo caso

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 9 = f(3)$$

cioè il limite è esattamente uguale al valore della funzione in quel punto. Questo è il caso piú comune: per la maggior parte delle funzioni non c'è bisogno di fare ragionamenti complicati per calcolare il limite in un punto, ma basta calcolare il valore della funzione in quel punto.

Esempio 3.8. Con lo stesso ragionamento appena fatto si verifica che in generale

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$$

per ogni potenza $n \geq 0$, e anzi

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

per ogni polinomio $P(x)$: ad esempio,

$$\lim_{x\to 2} (x^3 - 6x - 4) = 2^3 - 6 \cdot 2 - 4 = -8.$$

Un caso che non rientra nelle definizioni precedenti ma è molto interessante è quello degli *asintoti verticali*: ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

non ha limite per $x \to 0$, né da destra né da sinistra, come si intuisce subito dal suo grafico che conosciamo già. In questi casi diciamo che la funzione *tende all'infinito* in quel punto, o che ha *limite infinito*. Il simbolo che si usa per l'infinito è ∞. Vediamo la definizione precisa:

Definizione 3.9. Si dice che f *tende a* $+\infty$ *per* $x \to x_0^+$, e si scrive $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, se per ogni M esiste un δ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Le definizioni di $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ sono analoghe (sostituire $x_0 - \delta < x < x_0$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ rispettivamente).

Si dice che f *tende a* $-\infty$ quando vale la condizione precedente con $f(x) < M$ invece di $f(x) > M$. In tutti questi casi si dice anche che la funzione *ha un asintoto verticale nel punto* $x = x_0$.

Esercizio 3.5. Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e quindi la funzione non ha limite per $x \to 0$ (i limiti destro e sinistro sono diversi).

Allo stesso modo si verifica che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Per concludere con le definizioni di limite, c'è un ultimo caso che non abbiamo ancora considerato: spesso è interessante studiare il comportamento di una funzione per valori di x molto grandi; in alcuni casi la funzione tende ad un valore L (*asintoto orizzontale*), in altri la funzione diventa molto grande, e in altri casi il comportamento non è chiaro. Diamo le definizioni precise anche per questa situazione:

Definizione 3.10. Si dice che f *tende a* L *per* $x \to +\infty$, e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, se per ogni ϵ esiste K tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad x > K.$$

(La definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ è analoga, basta sostituire $x > K$ con $x < K$.) In questi casi si dice che la funzione *ha un asintoto orizzontale* $y = L$.

Si dice che f *tende a* $+\infty$ *per* $x \to +\infty$, e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, se per ogni M esiste K tale che

$$f(x) > M \quad \text{per} \quad x > K.$$

(La definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ è analoga, basta sostituire $x > K$ con $x < K$. Anche le definizioni di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ sono analoghe, basta sostituire $x > M$ con $x < M$.)

Esempio 3.11. Vediamo alcuni limiti elementari che seguono subito dalle proprietà delle funzioni elementari e dalle definizioni precedenti. Anzitutto le potenze: per $n > 0$ intero abbiamo sempre

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

mentre si ha chiaramente

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ per } n \text{ pari}, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ per } n \text{ dispari}.$$

Per le potenze negative il limite è zero:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ per ogni } n > 0 \text{ intero}$$

quindi l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale. Notiamo anche che si ha sempre per $n > 0$ intero

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

mentre bisogna distinguere

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ per } n \text{ pari}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ per } n \text{ dispari}.$$

E le potenze x^a con a numero reale? La situazione è piú semplice perché in questo caso la funzione x^a è definita solo per $x > 0$. Abbiamo solo due limiti interessanti: $x \to +\infty$ e $x \to 0^+$. Chiaramente dobbiamo distinguere il caso $a > 0$ in cui la funzione x^a è crescente:

$$a > 0 \implies \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^a = 0$$

e il caso $a < 0$ in cui la funzione x^a è decrescente:

$$a < 0 \implies \lim_{x \to +\infty} x^a = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^a = +\infty.$$

(Per visualizzare tutte queste proprietà basta esaminare i grafici delle funzioni elementari nel paragrafo precedente).

La funzione esponenziale ha un comportamento molto chiaro:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Anche per la funzione logaritmo, che è definita solo per $x > 0$, abbiamo semplicemente

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty.$$

Le proprietà di e^x si estendono anche a tutte le a^x con $a > 1$:

$$a > 1 \implies \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Invece le proprietà si rovesciano per il caso decrescente $0 < a < 1$:

$$0 < a < 1 \implies \lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Per le funzioni trigonometriche il discorso è piú complicato. Ad esempio, se proviamo a calcolare il limite per $x \to +\infty$ di $\sin x$, scopriamo subito che il limite *non esiste*: infatti se esistesse i valori di $f(x) = \sin x$ dovrebbero avvicinarsi sempre di piú al valore L del limite, mentre sappiamo bene che la funzione continua ad oscillare fra $+1$ e -1. Discorso simile per $\cos x$, e per i limiti per $x \to -\infty$.

Un'ultima osservazione: la funzione $\tan x$ ha degli asintoti verticali nei punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$, ad esempio

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

e questo comportamento si ripete per periodicità.

Esempio 3.12. E come si calcolano i limiti delle funzioni elementari in tutti gli altri punti? Ad esempio, quanto fa il limite

$$\lim_{x \to x_0} \sin x$$

in un punto x_0 fissato? La risposta è semplicissima:

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Ossia, *per calcolare il limite di* $\sin x$ *in un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *basta calcolare il valore di* $\sin x$ *in quel punto.* Non dimostreremo questa proprietà; ci limitiamo ad osservare che la stessa proprietà vale per tutte le funzioni elementari, e in tutti i punti x_0 in cui le funzioni sono definite. Ad esempio:

$$\lim_{x \to 3} e^x = e^3; \qquad \lim_{x \to 1} \tan x = \tan 1;$$

$$\lim_{x\to -2} \cos x = \cos(-2); \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$$

Ma naturalmente, limiti del tipo

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to -6} \sqrt{x}$$

non si possono calcolare perché usciremmo dal dominio della funzione $\sqrt{x}$.

Esercizi.

Esercizio 3.6 (⏭). Delle seguenti funzioni, solo una ammette limite per $x \to +\infty$; indicare quale.

$$\sqrt{1-x}, \qquad \sin(x), \qquad \log(1+\cos(x)), \qquad \frac{\sin(x)}{\log(x)}, \qquad \frac{1}{\cos(\log(x))}.$$

4. Proprietà dei limiti

Se vogliamo andare oltre le funzioni elementari e calcolare limiti di funzioni piú complicate abbiamo bisogno di qualche proprietà in piú. Anzitutto possiamo combinare i limiti che conosciamo già: per esempio si ha

$$\lim_{x\to 3}(e^x + \log x) = e^3 + \log 3$$

ossia se dobbiamo calcolare il limite di una somma, basta fare la somma dei limiti e cosí via. Piú precisamente:

Proposizione 4.1. *Sia $f \to L_1$ e $g \to L_2$ per $x \to x_0$ (oppure per $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$). Allora*

$$f + g \to L_1 + L_2, \quad f \cdot g \to L_1 \cdot L_2, \quad \text{e} \quad \frac{f}{g} \to \frac{L_1}{L_2} \ \text{se } L_2 \neq 0$$

per $x \to x_0$ (oppure per $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

Dimostrazione. Ad esempio, dimostriamo la proprietà per la somma $f + g$: sappiamo che $f \to L_1$ e $g \to L_2$, quindi per ogni ϵ possiamo trovare δ tale che

$$|f(x) - L_1| < \epsilon, \quad |g(x) - L_2| < \epsilon \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta$$

e queste disuguaglianze si possono scrivere anche cosí:

$$L_1 - \epsilon < f(x) < L_1 + \epsilon, \quad L_2 - \epsilon < g(x) < L_2 + \epsilon$$

Sommando le due disuguaglianze otteniamo

$$L_1 + L_2 - 2\epsilon < f(x) + g(x) < L_1 + L_2 + 2\epsilon \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta$$

e questo vuol dire esattamente $f_1 + f_2 \to L_1 + L_2$ per $x \to x_0$. Le altre proprietà si dimostrano in modo simile. □

Esempio 4.2. La proprietà precedente implica subito che per ogni polinomio $P(x)$ si ha

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Ad esempio,

$$\lim_{x\to 2}(2x^3 - 3x - 4) = 2\lim_{x\to 2}(x^3) - 3\lim_{x\to 2}(x) - 4 = 6.$$

Inoltre possiamo calcolare facilmente molti limiti di funzioni costruite a partire dalle funzioni elementari:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin x + e^x}{x^2 - 5} = \frac{\sin 1 - e^1}{1^2 - 5} = \frac{e - \sin 1}{4}.$$

Osservazione 4.3. Le proprietà precedenti si possono applicare senza problemi quando L_1 ed L_2 sono numeri reali. Ma è facile verificare che molte proprietà si estendono anche al caso di limiti infiniti. Esaminiamo i casi possibili. Cominciamo dalla somma:

1) se $f \to +\infty$ e $g \to +\infty$ allora $f + g \to +\infty$;
2) se $f \to -\infty$ e $g \to -\infty$ allora $f + g \to -\infty$;
3) se $f \to L$ e $g \to \pm\infty$ allora $f + g \to \pm\infty$.

Resta escluso il caso $+\infty - \infty$: in questo caso non si può dare una regola generale perché il risultato può essere diverso a seconda delle funzioni, e in questi casi si dice che

$$+\infty - \infty \quad \text{è un limite } \textit{indeterminato.}$$

Per capirlo basta un esempio banale: i due limiti seguenti sono entrambi del tipo $+\infty - \infty$, ma il risultato è diversissimo:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x) - \lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x - \lim_{x\to+\infty}(2x) = -\lim_{x\to+\infty} x = -\infty.$$

Per quanto riguarda il prodotto abbiamo

1) se $f \to +\infty$ e $g \to +\infty$ allora $f \cdot g \to +\infty$;
2) se $f \to -\infty$ e $g \to -\infty$ allora $f \cdot g \to +\infty$;
3) se $f \to +\infty$ e $g \to -\infty$ allora $f \cdot g \to + - \infty$;
4) se $f \to L > 0$ e $g \to \pm\infty$ allora $f \cdot g \to \pm\infty$;
5) se $f \to L < 0$ e $g \to \pm\infty$ allora $f \cdot g \to \mp\infty$.

Anche per il prodotto scopriamo che il caso

$$\infty \cdot 0 \quad \text{è un limite } \textit{indeterminato.}$$

Infine per il rapporto abbiamo

1) se $f \to L$ e $g \to \pm\infty$ allora $\frac{f}{g} \to 0$;
2) se $f \to \pm\infty$ e $g \to L > 0$ allora $\frac{f}{g} \to \pm\infty$;
3) se $f \to \pm\infty$ e $g \to 0^+$ allora $\frac{f}{g} \to \pm\infty$;
4) se $f \to \pm\infty$ e $g \to L < 0$ allora $\frac{f}{g} \to \mp\infty$;
5) se $f \to \pm\infty$ e $g \to 0^-$ allora $\frac{f}{g} \to \mp\infty$;

nei punti 3) e 5) abbiamo usato la notazione

$$g \to 0^+ \iff g \to 0 \;\text{ e }\; g(x) > 0$$

e

$$g \to 0^- \iff g \to 0 \;\text{ e }\; g(x) < 0.$$

Per il rapporto scopriamo che

$$\frac{\infty}{\infty} \;\text{ e }\; \frac{0}{0} \quad \text{sono limiti } \textit{indeterminati.}$$

Lo studio dei limiti indeterminati verrà ripreso nel prossimo capitolo (utilizzando il Teorema di de l'Hôpital).

Un'altra proprietà molto utile riguarda la composizione di funzioni:

Proposizione 4.4. *Supponiamo che $f(x) \neq a$ per ogni $x \neq x_0$,*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{y \to a} g(y) = L.$$
Allora, se è possibile comporre le due funzioni, si ha
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to a} g(y) = L.$$
Analoghe proprietà valgono nei casi $x \to x_0^{\pm}$, $x \to \pm\infty$, e quando a oppure L sono $\pm\infty$.

[Senza dimostrazione].

Esempio 4.5. Vediamo come si applica la proprietà precedente: per calcolare
$$\lim_{x \to 2} \sin(e^x)$$
basta porre $y = f(x) = e^x$ e osservare che
$$y = e^x \to e^2 \quad \text{per} \quad x \to 2$$
quindi
$$\lim_{x \to 2} \sin(e^x) = \lim_{y \to e^2} \sin(y) = \sin(e^2).$$
Altro esempio:
$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0} \sin(y) = 0$$
dove abbiamo posto $y = f(x) = 1/x$.

Prima di dedicarci al calcolo dei limiti, diamo ancora due proprietà molto utili:

Proposizione 4.6 (Il Teorema dei Carabinieri)**.** *Se $f(x)$ e $h(x)$ tendono allo stesso limite L per $x \to x_0$ e la funzione $g(x)$ è compresa tra di esse, ossia*
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$
allora anche $g \to L$ per $x \to x_0$. (Analoghe proprietà per limiti destri, sinistri e infiniti).

Dimostrazione. Dall'ipotesi sappiamo che: per ogni ϵ esiste δ tale che
$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$
per $0 < |x - x_0| < \delta$; quindi abbiamo anche
$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$
e in particolare
$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$
per $0 < |x - x_0| < \delta$, e questa è proprio la tesi. □

Ad esempio, calcoliamo il limite di $\sqrt{x^2 + x\sin(x)}$ per x che tende a più infinito. Siccome ci interessa solo il comportamento della funzione per grandi valori di x non è restrittivo supporre $x \geq 2$ e quindi,
$$0 \leq x \leq \frac{x^2}{2}, \qquad -\frac{x^2}{2} \leq -x \leq x\sin(x) \leq x \leq \frac{x^2}{2},$$
$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \leq \sqrt{x^2 + x\sin(x)} \leq \sqrt{\frac{3x^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \qquad x \geq 2.$$

Le funzioni $\frac{1}{\sqrt{2}}x$ e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ tendono entrambe a $+\infty$ e per il teorema dei Carabinieri si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x\sin(x)} = +\infty \ .$$

Proposizione 4.7 (Permanenza del segno)**.** *Se una funzione f è positiva ossia $f(x) \geq 0$, e tende ad un limite L per $x \to x_0$, allora anche $L \geq 0$. In altri termini: il limite di una funzione positiva è positivo (e il limite di una funzione negativa è negativo).*

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $L < 0$, scegliamo $\epsilon = \frac{|L|}{2}$ e proviamo ad applicare la definizione di limite: deve esistere δ tale che

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

per $0 < |x - x_0| < \delta$. Ma la seconda disuguaglianza implica che

$$f(x) < L + \epsilon = L + \frac{|L|}{2} < 0$$

e questo è assurdo perché sappiamo che la funzione è positiva. □

5. Calcolo di limiti

Ripassiamo rapidamente i limiti fondamentali che seguono subito dalla definizione delle funzioni elementari. Si consiglia di studiarli accuratamente facendo riferimento ai grafici visti in precedenza. Per le potenze con esponente positivo abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

e naturalmente anche

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Inoltre per le potenze pari

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = \lim_{x\to-\infty} x^6 = \dots = +\infty,$$

mentre per le potenze dispari

$$\lim_{x\to-\infty} x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = \lim_{x\to-\infty} x^5 = \dots = -\infty.$$

Passiamo alle potenze negative: si ha subito per ogni n

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0$$

e anche

$$\lim_{x\to 0_+} x^{-n} = +\infty.$$

Inoltre per le potenze pari

$$\lim_{x\to 0^-} x^{-2} = \lim_{x\to 0^-} x^{-4} = \dots = +\infty,$$

mentre per le potenze dispari

$$\lim_{x\to 0^-} x^{-3} = \lim_{x\to 0^-} x^{-5} = \dots = -\infty.$$

Per l'esponenziale abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Questo è lo stesso comportamento di tutte le funzioni esponenziali con base maggiore di uno:

$$a > 1 \implies \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

mentre se la base è minore di 1 il comportamento si rovescia:

$$0 < a < 1 \implies \lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

La funzione $\log x$ è definita solo per $x > 0$ e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty.$$

Infine due funzioni trigonometriche: la funzione $\tan x$ ha asintoti verticali per $x = \pm\frac{\pi}{2}$ (e per periodicità, anche per tutti gli $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

e analogamente

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty.$$

Per la funzione inversa $\arctan x$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

Osservazione 5.1. Attenzione: non sempre i limiti di una funzione esistono! Ad esempio il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

non esiste: la funzione $\sin x$ continua ad oscillare fra $+1$ e -1 al crescere di x, senza avvicinarsi ad un valore L (se tendesse ad un limite L, la funzione avrebbe un asintoto orizzontale). Analogamente *non esistono i limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \sin x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \cos x.$$

Esempio 5.2. Molti limiti si calcolano subito utilizzando le regole viste finora. Ad esempio, proviamo a calcolare i limiti

$$\lim_{x\to3} \frac{2}{x^3+2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3+2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3+2}.$$

Per il primo, grazie alla proposizione sulle operazioni fra i limiti, basta calcolare il valore della funzione nel punto:

$$\lim_{x\to3} \frac{2}{x^3+2} = \frac{2}{3^3+2} = \frac{2}{29}.$$

Per il secondo basta osservare che il denominatore

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+2) = +\infty$$

tende a $+\infty$, e quindi abbiamo subito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3+2} = 0.$$

Infine dato che

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2)=-\infty$$

abbiamo anche

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3+2}=0.$$

Esempio 5.3. Analogamente, per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

basta porre $y=\frac{1}{x}$ ed osservare che

$$x\to+\infty \implies y=\frac{1}{x}\to 0^+$$

dove $y\to 0^+$ vuol dire: $y\to 0$ da destra, ossia $y>0$. Allora il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\sin y=0.$$

Esempio 5.4. Dato il polinomio

$$f(x)=-4x^3+2x^2+5$$

calcolare i limiti

$$\lim_{x\to2}f(x),\qquad \lim_{x\to-1}f(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x),\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x).$$

I primi due sono semplicissimi: il limite è uguale al valore di f nel punto in cui si fa il limite. Infatti, usando i risultati noti per le operazioni sui limiti,

$$\lim_{x\to2}(-4x^3+2x^2+5)=-4\cdot\lim_{x\to2}x^3+2\cdot\lim_{x\to2}x^2+5=-4\cdot2^3+2\cdot2^2+5=19.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-1}(-4x^3+2x^2+5)=-4\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+5=11.$$

Il terzo limite è indeterminato, infatti $-4x^3\to-\infty$ mentre $2x^2\to+\infty$; ma possiamo riscrivere la funzione cosí:

$$\lim_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2+5)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(-4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)$$

e ora vediamo che

$$x^3\to+\infty,\qquad \left(-4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)\to-4$$

e quindi per le regole note

$$\lim_{x\to+\infty}(-4x^3+2x^2+5)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(-4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=-\infty$$

(abbiamo ottenuto una forma del tipo $(+\infty)\cdot(-4)$ che non è piú indeterminata!). L'ultimo limite si calcola allo stesso modo:

$$\lim_{x\to-\infty}(-4x^3+2x^2+5)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=+\infty$$

(qui otteniamo una forma del tipo $(-\infty)\cdot(-4)$).

Esempio 5.5. Calcoliamo il limite del rapporto di due polinomi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-6x^2+x-1}{x^3+2x^2+5}.$$

Notare che sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$, quindi abbiamo una forma indeterminata. Ma i due infiniti sono "dello stesso ordine", quindi il limite è finito: per vederlo mettiamo in evidenza il grado massimo al numeratore e al denominatore e semplifichiamo:

$$\frac{2x^3-6x^2+x-1}{-3x^3+2x^2+5}=\frac{x^3\left(2-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{2-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{-3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}\to-\frac{2}{3}$$

per $x\to+\infty$.

Se invece i due polinomi hanno grado diverso, il rapporto sarà dominato dal grado maggiore. Ad esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^7}{3x^5-x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}{x^6\left(\frac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\frac{1}{x^3}+1}{\frac{3}{x}-1}=-\infty$$

perché il numeratore ha grado piú alto. Come regola empirica possiamo scrivere:

$$\frac{x^4+x^7}{3x^5-x^6}\sim\frac{x^7}{-x^6}=-x\quad\text{per}\quad x\to\pm\infty$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^7}{3x^5-x^6}=-\infty,\qquad\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^7}{3x^5-x^6}=+\infty.$$

Analogamente, possiamo dire che

$$\frac{-3x^4+5x^2}{8x^5+x^2}\sim\frac{-3x^4}{8x^5}=-\frac{3}{8x}\quad\text{per}\quad x\to\pm\infty$$

ossia

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+5x^2}{8x^5+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+5x^2}{8x^5+x^2}=0.$$

Esempio 5.6. Attenzione: la regola precedente si applica per $x\to\pm\infty$ (il grado piú alto domina quando x è grande!).

Negli altri punti il limite si calcola secondo le solite regole. Per calcolare il limite di un rapporto di polinomi per $x\to x_0$, se il denominatore non si annulla in x_0 basta calcolare la funzione nel punto $x=x_0$. Se invece il denominatore si annulla in x_0 (e il numeratore non si annulla), il rapporto tende all'infinito, e basta capire il segno dell'espressione per stabilire se il limite è $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty,\qquad\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty,\qquad\lim_{x\to7}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{5}.$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{1-2x}{x^2-9}=+\infty,\qquad\lim_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x^2-9}=-\infty,\qquad\lim_{x\to0}\frac{1-2x}{x^2-9}=-\frac{1}{9}.$$

Se si annullano sia il numeratore che il denominatore, abbiamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; se conosciamo le radici dei polnomi possiamo semplificare la frazione, altrimenti possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital che studieremo nel capitolo seguente.

Esempio 5.7. Uno dei metodi piú utili è il *cambiamento di variabile*, ossia l'applicazione della Proposizione 4.4. Ad esempio il limite

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}$$

ponendo $y = 2x$ e osservando che

$$x \to +\infty \iff y \to +\infty$$

diventa

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty.$$

Analogamente:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-5x} : \quad y = -5x \to -\infty \implies \lim_{x\to+\infty} e^{-5x} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} : \quad y = \frac{1}{x} \to +\infty \implies \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} : \quad y = \frac{1}{x} \to -\infty \implies \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} e^{-\frac{3}{x}} : \quad y = -\frac{3}{x} \to +\infty \implies \lim_{x\to0^-} e^{-\frac{3}{x}} = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$$

Qualche altro esempio che riguarda le potenze:

$$\lim_{x\to+\infty} (1/2)^x = 0$$

perché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1. Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x - 3^x) = \lim_{x\to+\infty} 3^x \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 \right) = -\infty$$

perché $(2/3)^x \to 0$.

Esempio 5.8. Il rapporto

$$\frac{e^x}{x}$$

per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ma possiamo dire che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

Più in generale, per ogni numero positivo $a > 0$ vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x} = +\infty$$

e non è difficile dimostrare questo fatto: basta infatti ricordare la disuguaglianza $e^x \geq 1 + x$ e scrivere

$$e^{ax} = \left(e^{\frac{ax}{2}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{ax}{2}\right)^2$$

e quindi

$$\frac{e^{ax}}{x} \geq \frac{1}{x}\left(1 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \frac{1}{x} + a + \frac{a^2 x}{4}$$

da cui otteniamo subito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x} \geq \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + a + \frac{a^2 x}{4}\right) = +\infty$$

(c'è un metodo ancora piú semplice basato sul Teorema di de l'Hôpital, che studieremo nel prossimo capitolo). Osserviamo che questo limite si può interpretare cosí: quando $x \to +\infty$,

e^x tende a $+\infty$ *molto piú velocemente* di x.

La stessa proprietà vale in generale quando abbiamo il rapporto di un esponenziale con una potenza: la quantità dominante è sempre l'esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{100000}} = +\infty.$$

Infatti, per ogni $b > 0$ si può scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/b}}{x}\right)^b = +\infty^b = +\infty\ .$$

Notare che invece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

non è una forma indeterminata!

Se prendiamo il reciproco delle funzioni precedenti otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100000}}{e^x} = 0.$$

Il limite seguente non è indeterminato:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x$$

è indeterminato della forma $\infty \cdot 0$. Possiamo risolverlo subito con il cambiamento di variabile $y = -x$ notando che $y \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{y\to+\infty} -ye^{-y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Molto simile il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$$

per il quale usiamo il cambiamento di variabile

$$y = \log x \implies y \to +\infty$$

(ricordare che $y = \log x \iff x = e^y$) ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Anche questo limite si può interpretare come segue:

x tende a $+\infty$ *molto piú velocemente* di $\log x$.

Come prima otteniamo in modo simile i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Un altro limite simile ai precedenti:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x.$$

Se poniamo

$$y = \log x \implies y \to -\infty$$

e osserviamo che $e^y = x$, abbiamo subito

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{y\to-\infty} ye^y = 0$$

(già dimostrato).

Alcuni limiti per concludere:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x + x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x + x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x - x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1.$$

Esempio 5.9. Naturalmente non tutti i limiti si possono calcolare con i metodi precedenti; in molti casi servono argomenti ad hoc. Ad esempio il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

esiste ed è uguale a zero anche se non rientra nei metodi visti finora. Il metodo piú semplice per dimostrarlo è utilizzare il Teorema dei Carabinieri: osserviamo che la funzione seno è sempre compresa fra $+1$ e -1, quindi per $x > 0$ possiamo scrivere

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x};$$

ma la prima e la terza funzione tendono a zero per $x \to +\infty$, quindi il Teorema dei Carabinieri ci garantisce che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Esempio 5.10. La razionalizzazione di espressioni algebriche può talvolta essere utile nel calcolo di limiti, come nei seguenti due esempi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4-x} - 2}.$$

Nel primo caso, moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x} + 1$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}\ .$$

Nel secondo caso, moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{4-x}+2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4-x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4-x}+2)}{-x}=-4\ .$$

Esercizi.

Esercizio 3.7 (▶▶|). Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-3x^2}{8x^3+x^2},\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4+x^5}{3x^5-x^2},\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x^5}{x^4-x^6}.$$

Esercizio 3.8. Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 2^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{2+5x}{2-x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 1^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{2x+3}{x^4-1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 3^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{x^4-3x^8}{x^5(2x^3-18x)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 2^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{4}{x^3-x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 1^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{(x-1)(x+5)(2x+5)}{(2x-2)(7-3x)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to -1^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{-2x^4+x^2+3}{7x^3+x^6+6}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 0^\pm}\quad \text{di}\quad \frac{x^3+6x^2}{5x^2+x^3}.$$

Esercizio 3.9. Usare il procedimento usato nell'Esempio 5.10 per calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}.$$

Esercizio 3.10. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x\to\pm\infty$, $x\to 0^\pm$ (se possibile!):

$$xe^{-x},\qquad \frac{e^{x/2}}{x},\qquad e^{-x^2},\qquad e^{-\frac{1}{x^2}},\qquad xe^{\frac{1}{x}},\qquad xe^{-\frac{1}{x}},$$

$$\frac{e^x-1}{x},\qquad \frac{e^x+x^2}{x^3-e^{-x}},\qquad \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^5},\qquad \frac{e^{-x}}{x},\qquad \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}},$$

$$\frac{e^x}{x^2},\qquad \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\qquad \sqrt{e^x},\qquad \log(2x)-\log x,\qquad e^{-x}-x^3$$

$$x^x,\qquad e^x-e^{3x},\qquad x^2e^x-xe^{3x},\qquad x2^x-e^x,$$

$$x^2\log\sqrt{x},\qquad x\log(x^2),\qquad e^{-\frac{1}{x^3}},\qquad \log\frac{1}{x},\qquad \frac{\log(e^x)}{e^x},$$

$$\frac{1}{1+e^{1/x}},\qquad \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},\qquad \log(e^x-1),\qquad \log(e^{-x}-1),\qquad x^2\log x,$$

$$\sqrt{x}\log x, \qquad \sqrt{x}\log(x^{10}), \qquad \frac{\sqrt{x}}{\log x}, \qquad \sqrt{\log(x^2)}$$

Esercizio 3.11. Per le seguenti funzioni, determinare l'insieme di definizione (che è sempre una unione di intervalli) e quindi calcolare i limiti agli estremi degli intervalli di definizione:

$$\log(x^2-x), \qquad |x|, \qquad \frac{x}{2x-3}, \qquad \log\frac{1}{2-x}, \qquad e^{\frac{1}{x}}, \qquad xe^{-\frac{1}{x}},$$

$$e^{\frac{x}{x+1}}, \qquad e^{\frac{1}{x-2}}, \qquad \frac{e^x}{e^x-1}, \qquad \sqrt{x+1}, \qquad \sqrt{\frac{1}{1-x}},$$

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}}, \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad \sqrt{1-x^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}, \qquad \frac{x^2}{2-x}, \qquad \frac{x+1}{x^2-1}, \qquad \frac{e^x}{x-2}, \qquad e^{2x^2-x^3}$$

$$\frac{x+1}{e^x}, \qquad \frac{x}{e^{\frac{2}{x}}}, \qquad \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \log(1-e^x), \qquad \log(8-2x^2),$$

$$x\log\frac{1}{x}, \qquad x\cdot\log\frac{1}{x-2}, \qquad \frac{e^x+1}{e^x-1}, \qquad \frac{e^{-x}-1}{e^x}, \qquad \frac{e^{2x}}{e^x+1},$$

$$e^{2x-x^2}, \qquad \left(1+\frac{1}{x}\right)e^x, \qquad \frac{1}{e^{x-x^2}}, \qquad \log(2x^2+x),$$

$$(x+1)\log(x+1), \qquad \log(1+\sqrt{x-1}), \qquad \log\left(\frac{2}{2x+3}\right), \qquad \frac{1}{\log x},$$

$$e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}, \qquad e^{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad \frac{\log x}{\sqrt{x}}, \qquad (x-1)e^{\frac{1}{x}}, \qquad \frac{1}{|x|}.$$

Esercizio 3.12 (⏭). Aiutandosi con il Teorema dei Carabinieri, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{e^x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\sin x}}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

6. Limiti notevoli

Occupiamoci ora di alcuni limiti che richiedono una cura particolare: si tratta dei limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$

Studiamo il primo dei due limiti. Ricordiamo la disuguaglianza

$$0\le\sin x\le x\le\tan x, \qquad \text{per}\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}\,.$$

Dalle disuguaglianze

$$0\le\sin x\le x$$

dividendo per $x>0$ otteniamo

$$0\le\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

Inoltre dalla disuguaglianza

$$x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

dividendo per $x > 0$ e moltiplicando per $\cos x$ (notare che anche $\cos x > 0$ nella zona considerata) otteniamo

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

e quindi scrivendo tutto insieme abbiamo dimostrato che

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{per} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Dal cambiamento di variabile $x \to -x$, dato che $\cos(-x) = \cos x$ e $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, otteniamo che la precedente disuguaglianza è vera anche per $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$. Quindi

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{per} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Ma $\cos x \to 1$ per $x \to 0$, quindi applicando il Teorema dei Carabinieri otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Passiamo al secondo limite: vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ricordiamo che l'esponenziale e^x verifica la proprietà

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{per tutti gli } x.$$

Quindi, mettendo $-x$ al posto di x si ricava senza fatica che

$$e^{-x} \geq 1 - x \qquad \text{per tutti gli } x.$$

Se $x < 1$, allora moltiplicando ambo i membri per la funzione positiva $\dfrac{e^x}{1-x}$ si ottiene

$$\frac{1}{1-x} \geq e^x \qquad \text{per tutti gli } x < 1.$$

e quindi, sottraendo 1

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \geq e^x - 1 \geq x \qquad \text{per tutti gli } x < 1.$$

Se $x > 0$, dividendo ambo i membri per x otteniamo

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq 1 \qquad \text{per} \quad 1 > x > 0.$$

Se invece dividiamo per $x < 0$ otteniamo

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 \qquad \text{per} \quad x < 0.$$

Quindi per il teorema dei Carabinieri si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e questo equivale a dire che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Esempio 6.1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Basta porre $y = 1/x$ e notare che

$$x \to +\infty \implies y = \frac{1}{x} \to 0$$

ed otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Esempio 6.2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Il trucco è moltiplicare numeratore e denominatore per $1+\cos x$; si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esempio 6.3. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}.$$

Il primo limite, con la sostituzione $y = -x$ diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{-y} = -\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} = -1.$$

Nel secondo limite, con la sostituzione $y = 2x$ diventa,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y/2} = 2\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} = 2.$$

La stessa procedimento mostra che per ogni numero reale a vale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = a\,.$$

Esempio 6.4. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\ .$$

Il primo limite si può scrivere come

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} + 1 = 1+1 = 2\,.$$

Nel secondo limite, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore,

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{x} = \frac{e^{x}-1+1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{x}-1}{x} - \frac{e^{-x}-1}{x}$$

e otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} = 1-(-1) = 2.$$

Esercizi.

Esercizio 3.13 (▶▶|)**.** Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x},\qquad a\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 3.14. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x\to 0$.

$$\frac{e^x-1-x}{x},\qquad \frac{e^x+e^{-x}-2}{x},\qquad \frac{e^x-1}{1-e^{-x}},\qquad \frac{\sin x}{x\cos x},\qquad \frac{\sin^2 x}{x^2},\qquad \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x}.$$

Esercizio 3.15. Utilizzando le sostituzioni suggerite ed i limiti notevoli, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\quad (x=e^y-1);\qquad \lim_{x\to\pm\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad (x=\frac{1}{y});$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ \text{(prendere i logaritmi)};\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\quad (x=ay);$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x+2}\quad (x=y+2);\qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}\quad (y=x+\pi);$$

Esercizio 3.16. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x+2\sqrt{-x}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{12}+x^4}{e^x};\qquad \lim_{x\to+\infty}2^{-e^x};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{e^x};\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^2(x)};$$

7. Funzioni continue

Dal punto di vista intuitivo una funzione $f\colon I\to\mathbb{R}$, definita su un intervallo I, è continua se è possibile tracciarne il grafico senza staccare la matita dal foglio o, se preferite, il gesso dalla lavagna. La nozione rigorosa di continuità è data dalla seguente definizione.

Definizione 7.1. Sia $f\colon I\to\mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I e sia x_0 un punto di I. La funzione si dice *continua nel punto* x_0 se il limite di f per $x\to x_0$ esiste ed è uguale al valore della funzione in quel punto:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

La funzione si dice *continua su* I se è continua in tutti i punti di I.

Esempio 7.2. Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che tutte le funzioni elementari verificano la proprietà appena definita: quindi le funzioni elementari sono tutte continue sul loro dominio.

Inoltre la somma, il prodotto e il rapporto (se il denominatore è $\neq 0$) di funzioni continue sono ancora funzioni continue: questo segue subito dalla Proposizione 4.1. Ad esempio per vedere che $f+g$ è continua basta scrivere

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0).$$

Se invece usiamo la Proposizione 4.4 otteniamo che anche la composizione di funzioni continue è continua: infatti se $f(x)$ è continua in x_0, $g(y)$ è continua in $y_0 = f(x_0)$, ed è possibile comporre le due funzioni, allora ponendo $y = f(x)$

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

ossia $g(f(x))$ è continua in x_0.

Esempio 7.3. Le funzioni

$$\sin(x^2 - e^x + 2x), \quad \log(\sqrt{x}), \quad e^{\sin(x^2)+x-3}, \quad xe^{-\frac{1}{x}}$$

sono continue sul loro insieme di definizione, in quanto ottenute tramite somma, prodotto, rapporto e composizione di funzioni continue.

Esempio 7.4. Un esempio di funzione che **non è continua** è data dalla parte intera $\lfloor x \rfloor$ di un numero reale, definita come il più grande numero intero minore o uguale a x. Ad esempio

$$\lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor 1 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0,2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0,2 \rfloor = -1, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3 \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4\,.$$

Per verificare che non è continua basta notare che

$$\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor\,.$$

Studiamo ora alcune proprietà molto importanti delle funzioni continue:

Proposizione 7.5 (Permanenza del segno)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione sull'intervallo aperto I e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che f sia continua nel punto x_0 e che $f(x_0) > 0$. Allora $f(x) > 0$ per x vicino a x_0: ossia, esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per $|x - x_0| < \delta$. (Proprietà analoga se $f(x_0) < 0$).*

Dimostrazione. Applichiamo la definizione di limite alla funzione f: dato che f è continua in x_0, il suo limite in x_0 è proprio $L = f(x_0)$, quindi dalla definizione di limite sappiamo che per ogni ϵ esiste δ tale che

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

per $0 < |x - x_0| < \delta$. Se ora scegliamo

$$\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

(notare che $\epsilon > 0$), otteniamo

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

per $0 < |x - x_0| < \delta$; la prima di queste disuguaglianze ci dice che f è strettamente positiva. $\square$

Teorema 7.6 (Teorema degli zeri delle funzioni continue)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0$. Allora esiste un punto c fra a e b nel quale la funzione f si annulla: $f(c) = 0$. Lo stesso risultato vale se $f(a) \geq 0$ e $f(b) \leq 0$.*

Spiegazione. La dimostrazione rigorosa è abbastanza complicata e quindi la omettiamo; dal punto di vista intuitivo il teorema degli zeri è chiaro. Il piano $\mathbb{R}^2$ è diviso dall'asse delle ascisse in due semipiani, quello superiore $\{(x, y) : \ y > 0\}$ e quello inferiore $\{(x, y) : \ y < 0\}$. Provate adesso a disegnare il grafico di f: dovete congiungere il punto $(a, f(a))$, situato nel semipiano inferiore, con il punto $(b, f(b))$, situato nel semipiano superiore. Siccome f è continua non potete sollevare la matita dal foglio e ad un certo punto dovete incrociare l'asse delle ascisse. □

Esempio 7.7. Usiamo il teorema degli zeri per dimostrare che il polinomio di terzo grado x^3+x-1 possiede una radice nell'intervallo aperto $]0, 1[$. A tal fine osserviamo che la funzione continua

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + x - 1,$$

soddisfa le ipotesi del Teorema 7.6 in quanto $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. Dunque esiste un punto c compreso tra 0 e 1 dove la funzione f si annulla.

Teorema 7.8 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato. Allora esistono due punti x_1 e $x_2 \in [a, b]$ tali che, detto m il valore di f in x_1 e M il valore di f in x_2, si ha*

$$f(x_1) = m \le f(x) \le M = f(x_2) \quad \textit{per tutti gli} \quad x \in [a, b]\ .$$

La dimostrazione richiede l'introduzione di una lunga serie di risultati preliminari sulle proprietà dei numeri reali che vanno al di là degli obiettivi di queste note e pertanto viene omessa.

I due punti x_1 e x_2 trovati nel teorema precedente si chiamano il *punto di minimo assoluto* e *punto di massimo assoluto* di f su $[a, b]$ rispettivamente; mentre m e M sono detti il *valore minimo assoluto* e il *valore massimo assoluto* di f su $[a, b]$ rispettivamente.

Dal Teorema di Weierstrass sappiamo che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ha sempre un minimo m e un massimo M sull'intervallo. Ora mostriamo che la funzione assume anche tutti i valori intermedi fra m e M:

Teorema 7.9 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano m il minimo e M il massimo di f su $[a, b]$. Sia poi μ un numero intermedio fra m e M:*

$$m \le \mu \le M.$$

Allora esiste un punto c fra a e b nel quale la funzione f vale esattamente μ ossia $f(c) = \mu$.

Dimostrazione. Il Teorema di Weierstrass garantisce che la funzione ammette un punto di minimo in cui $f(x_1) = m$ e un punto di massimo in cui $f(x_2) = M$. Quindi, se $\mu = m$ oppure $\mu = M$ non c'è nulla da dimostrare.

Se invece $m < \mu < M$, consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \mu.$$

Questa funzione è continua; inoltre si ha

$$g(x_1) = f(x_1) - \mu = m - \mu < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - \mu = M - \mu > 0,$$

e quindi per il Teorema degli zeri esiste un punto c fra x_1 e x_2 in cui g si annulla:

$$g(c) = f(c) - \mu = 0$$

e da qui segue subito la tesi. □

Esercizi.

Esercizio 3.17. Dire quali delle seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema degli zeri delle funzioni continue sull'intervallo $[-1, 1]$.

$$x^2 - x - 1, \quad \frac{1}{x}, \quad x^2 + x + 1, \quad e^x - \frac{1}{2}, \quad \log(x^2), \quad \sqrt{2}\sin(x) - 1 \ .$$

CAPITOLO 4

Derivazione

1. La derivata

Il concetto di derivata è importantissimo e molto naturale. Per avere un esempio concreto, pensate al moto di una macchina: se $f(t)$ è la funzione che esprime quanta strada avete percorso fino ad un certo istante t, allora la velocità a cui state andando è esattamente la derivata di f (cioè il tachimetro segna la derivata del contachilometri...).

Detto in un altro modo, la derivata di una funzione esprime la velocità con cui quella funzione cresce o decresce al variare del punto x. Studiamo la definizione precisa di questo concetto.

Definizione 1.1. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione sull'intervallo aperto I e sia x_0 un punto di I. Per ogni $h \neq 0$ abbastanza piccolo, il *rapporto incrementale* di f in x_0 è il rapporto

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

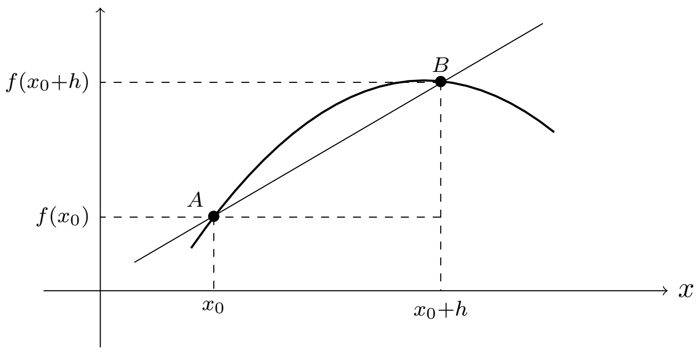


FIGURA 4.1. Il rapporto incrementale.

Il rapporto incrementale ha un senso geometrico preciso: esprime l'inclinazione (= il coefficiente angolare) della retta passante per i punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0+h, f(x_0+h))$. Se ora consideriamo valori di h sempre piú piccoli, non è difficile intuire che la retta AB si avvicina sempre di piú alla retta tangente al grafico di f nel punto A. La definizione rigorosa è semplicissima:

Definizione 1.2. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste il limite finito per $h \to 0$ del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Tale limite si chiama la *derivata* di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Si dice che f è *derivabile* se è derivabile in tutti i punti del suo dominio; la funzione $f'(x)$ si chiama anche la *(funzione) derivata* di f.

Dire che esiste il limite finito significa in particolare che $f'(x_0)$ è un numero reale: in altre parole, se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty\,,$$

allora la funzione f non è derivabile in x_0.

Osservazione 1.3. Il significato geometrico della derivata è chiaro: quando facciamo tendere h a zero, e quindi avviciniamo il punto B lungo la curva al punto A, la retta AB si avvicina sempre di piú alla retta tangente al grafico di f in A. Quindi è naturale interpretare il valore di $f'(x_0)$ come la pendenza della retta tangente al grafico nel punto A. Se vogliamo determinare completamente la retta tangente, basta osservare che essa deve avere la forma $y = ax+b$, abbiamo già detto che $a = f'(x_0)$, inoltre la retta deve passare per $A = (x_0, f(x_0))$ e quindi

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \implies b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

e in conclusione l'equazione della retta tangente nel punto A è

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Esempio 1.4. Studiamo alcuni casi in cui il calcolo della derivata è immediato.

Se $f(x) = C$ è una funzione costante, il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{C-C}{h} \equiv 0$$

si annulla sempre, dunque anche il limite è zero; in conclusione, una funzione costante è derivabile ed ha ha derivata nulla:

$$f(x) \equiv C = cost. \implies f'(x) \equiv 0 \quad (\text{ossia } C' = 0).$$

Se $f(x) = ax+b$, abbiamo subito

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} \equiv a$$

e quindi la derivata di $f(x) = ax+b$ è costante ed uguale al coefficiente angolare a:

$$(ax+b)' \equiv a.$$

Se $f(x) = x^2$, allora

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = 2x_0 + h$$

e mandando h a zero si ottiene

$$f'(x_0) = 2x_0$$

ossia semplicemente

$$(x^2)' = 2x.$$

Se $f(x) = x^3$, allora

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^3-(x_0)^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$$

e prendendo il limite per h che tende a zero si ottiene

$$f'(x_0) = 3x_0^2, \quad \text{e quindi} \quad (x^3)' = 3x^2\,.$$

Con un calcolo simile si ottiene che per ogni $n \geq 1$ intero

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Esempio 1.5. Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in un punto $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere più semplicemente $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Esempio 1.6. Non è difficile calcolare la derivata delle funzioni elementari. Consideriamo ad esempio la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Si ha

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \frac{e^h-1}{h} e^{x_0}$$

e quindi se mandiamo h a zero otteniamo subito

$$f'(x_0) = e^{x_0}$$

ossia abbiamo ottenuto la semplice regola

$$(e^x)' = e^x.$$

Consideriamo ora $f(x) = \sin x$; il rapporto incrementale è uguale a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

e ricordando la formula di addizione

$$\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h$$

il rapporto si scrive

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos h - 1}{h}\sin(x_0) + \frac{\sin h}{h}\cos(x_0)$$

Vogliamo calcolare il limite per $h \to 0$. Sappiamo che $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$; inoltre possiamo usare la formula

$$1 - \cos h = 2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2$$

per ottenere

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2 = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\frac{h}{2} = 0.$$

In conclusione il rapporto incrementale tende a $\cos(x_0)$ ed otteniamo la regola

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Proposizione 1.7. *Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE. Basta partire dalla seguente identità:

$$f(x_0 + h) = h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0).$$

Se calcoliamo il limite per $h \to 0$ otteniamo allora

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0)$$

e ponendo $x = x_0 + h$ otteniamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia f è continua in x_0. □

Esempio 1.8. Non tutte le funzioni continue sono derivabili! ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x_0 = 0$. Per verificarlo scriviamo il rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Chiaramente il limite per $h \to 0$ di questo rapporto non esiste: infatti il limite destro è uguale a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

mentre il limite sinistro è uguale a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Notare però che $|x|$ è derivabile sia sull'intervallo $x > 0$, dove $|x| = x$ e quindi la derivata vale $+1$, sia sull'intervallo $x < 0$, dove $|x| = -x$ e quindi la derivata vale -1.

Un altro esempio di funzione continua ma non derivabile è quella definita come $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}$ per $x \neq 0$, e $g(0) = 0$. Lasciamo al lettore la semplice verifica che

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = +\infty\ .$$

Le seguenti proprietà ci metteranno in grado di derivare tutte le funzioni ottenute come combinazioni di funzioni elementari:

Proposizione 1.9 (Regole di derivazione)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili. Allora valgono le seguenti regole di derivazione:*

$$(f + g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

e, dove g è diversa da zero,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto la prima regola (le altre si dimostrano in modo simile, anche se con qualche conto in piú): il rapporto incrementale di $f+g$ in un punto x_0 è uguale a

$$\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

e calcolando il limite per $h \to 0$ otteniamo subito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h} = f'(x_0)+g'(x_0).$$

□

Esempio 1.10. Calcolare la derivata delle funzioni $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}, \dots$, con $n > 0$. Applicando le regole precedenti si ha

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(x^2)'}{x^4} = \frac{-2}{x^3}, \qquad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Esempio 1.11. Le funzioni $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ vengono dette rispettivamente seno e coseno iperbolico e sono una la derivata dell'altra: infatti si ha

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -e^{-x},$$

e quindi

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$$

Proposizione 1.12 (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione derivabile e iniettiva, e sia g la sua funzione inversa. Allora anche g è derivabile e si ha la regola di derivazione*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \textit{dove abbiamo posto} \ \ y = f(x).$$

[Senza dimostrazione]

Proposizione 1.13 (Derivata della funzione composta)**.** *Se f e g sono derivabili ed è possibile comporle, anche la funzione composta $h(x) = g(f(x))$ è derivabile e vale la regola di derivazione*

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

[Senza dimostrazione]

Esempio 1.14. Ora siamo in grado di derivare quasi qualunque funzione. Studiamo gli esempi piú importanti:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

usando la regola per la derivata di un rapporto. Notare che la regola precedente si può anche scrivere

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1.$$

Per derivare $\log x$ possiamo usare la regola per la derivata di una funzione inversa, dato che $g(y) = \log y$ è l'inversa di $y = e^x$: posto $y = e^x$ abbiamo subito

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} \equiv \frac{1}{y}$$

che piú comodamente si può scrivere

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Con lo stesso metodo, la funzione $\arctan y$, inversa di $y = \tan x$, ha per derivata

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} == \frac{1}{\tan^2 x + 1} \equiv \frac{1}{y^2 + 1}$$

e quindi abbiamo ottenuto la regola

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Anche la funzione $\arcsin y$, inversa di $y = \sin x$, ha una derivata molto semplice:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

e quindi la regola è

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La regola

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

si dimostra in modo identico.

Per finire occupiamoci delle potenze: per derivare la funzione $f(x) = x^a$, $x > 0$ ed a numero reale qualunque, basta scrivere

$$f(x) = x^a = (e^{\log x})^a = e^{a \log x}$$

e applicare la regola per la derivata di una funzione composta:

$$f'(x) = (x^a)' = (e^{a \log x})' = e^{a \log x} \cdot (a \log x)' = e^{a \log x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x},$$

cioè semplificando

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

esattamente come nel caso di potenze intere. Particolarmente interessante è il caso delle radici quadrate; infatti si può scrivere $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ e quindi

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .$$

Invece per la funzione esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = (a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a}(x \log a)' = e^{x \log a} \log a$$

da cui la regola

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

Come ulteriore applicazione della regola di derivazione della funzione composta calcoliamo la derivata delle funzioni del tipo $e^{f(x)}$, $\log(f(x))$ e $\sqrt{f(x)}$: nel primo caso $e^{f(x)}$ è la composizione di e^y e $y = f(x)$, applicando la Proposizione 1.13 otteniamo

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x),$$

mentre nel secondo e terzo caso otteniamo

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad \sqrt{f(x)}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} .$$

Ad esempio, si ha:

$$(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}, \qquad (e^{\sin(x)})' = e^{\sin(x)}(\sin(x)') = \cos(x)e^{\sin(x)},$$

$$\sqrt{x+1}' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \qquad \log(\cos(x))' = \frac{\cos(x)'}{\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) ,$$

$$\log(x^2+x)' = \frac{(x^2+x)'}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x^2+x}, \qquad \sqrt{\log(x)}' = \frac{\log(x)'}{2\sqrt{\log(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{\log(x)}} .$$

Esempio 1.15.

$$\sqrt{x^2-1}' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \sqrt{x^2+1}' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} ,$$

$$\log(x + \sqrt{x^2-1})' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} ,$$

$$\log(x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Riassumiamo nelle tabelle seguenti le regole elementari di derivazione:

$f(x)$	$f'(x)$
costanti	0
x^a	ax^{a-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$\log a \cdot a^x$
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$
$\log(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\sin(g(x))$	$g'(x)\cos(g(x))$

Esercizi.

Esercizio 4.1 (▶▶|). Calcolare la derivata (rispetto a x) delle funzioni seguenti:

$$6x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \qquad 8x^7 - 4x^2 \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \qquad \frac{x+1}{x-1} \qquad e^{2x}$$

$$\frac{1}{x} \qquad \sqrt{x} \qquad \sqrt{2-3x} \qquad 3^x \qquad x^x \qquad \log(\cos x) \qquad \arctan(5-3x^2).$$

Esercizio 4.2. Calcolare la derivata (rispetto a x) delle funzioni seguenti:

$$\frac{\pi}{x} - \log(2) \qquad \log(3) \qquad \frac{1-\tan(x)}{x} \qquad x\sin(x) - \cos(x)$$

$$\frac{x}{1-\cos(x)} \qquad \frac{1+e^x}{1-e^x} \qquad \frac{\cos(x)}{e^x} \qquad \sqrt{x}\,\cos(x)$$

$$\tan(ax) \qquad e^{-bx} \qquad \tan\left(\frac{2}{x}\right) \qquad \sin(5x) \qquad \sin x \cos x \qquad (\sin x)^2.$$

Esercizio 4.3. Calcolare la derivata (rispetto a x) delle funzioni seguenti:

$$\frac{1}{x^2} \qquad \frac{1}{x^n} \qquad \sqrt[3]{x} \qquad x^{\frac{1}{2}} \qquad x^{\frac{2}{3}} \qquad x^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \qquad \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt[3]{2-3x} \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad \sqrt[5]{x^2} \qquad xe^x - 1 \qquad (xe^x-1)^2 \qquad \sin^2 x \qquad 2^x$$

$$(\sin x)^x \qquad \frac{x^2-1}{2-3x^2} \qquad \arcsin\sqrt{x} \qquad \frac{1+2e^x}{x+6} \qquad \tan\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\log\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \log\frac{1+x}{1-x} \qquad \arctan\frac{1}{x} \qquad x\log x \qquad (3-4x)\log(2x+5)$$

$$x + xe^{1/x} \qquad \frac{1}{x}e^x \qquad e^{\frac{1}{x-1}} \qquad x^2\log(2-6x) \qquad \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$$

$$\sqrt{x^3 + \sin(x)} \qquad \log(\sqrt{x^2+1} - x) \qquad \log(2x + \sqrt{4x^2+1}).$$

2. Massimi e minimi

Una delle principali applicazioni delle derivate è nello studio dei massimi e minimi delle funzioni. Anzitutto una definizione precisa:

Definizione 2.1. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I. Si dice che M è il *massimo* di f su I, e si scrive

$$M = \max_I f$$

se esiste un punto $x_0 \in I$ in cui la funzione vale M e in nessun altro punto vale piú di M:

$$f(x_0) = M \geq f(x) \quad \forall x \in I.$$

il punto x_0 si dice allora *punto di massimo assoluto* di f su I.

Invece si dice che x_0 è un *punto di massimo relativo (o massimo locale)* di f se esiste δ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per gli x tali che $|x - x_0| < \delta$ (ossia se $f(x_0)$ è maggiore dei valori di f nei punti vicini a x_0).

Le definizioni di minimo, punto di minimo assoluto e relativo sono analoghe.

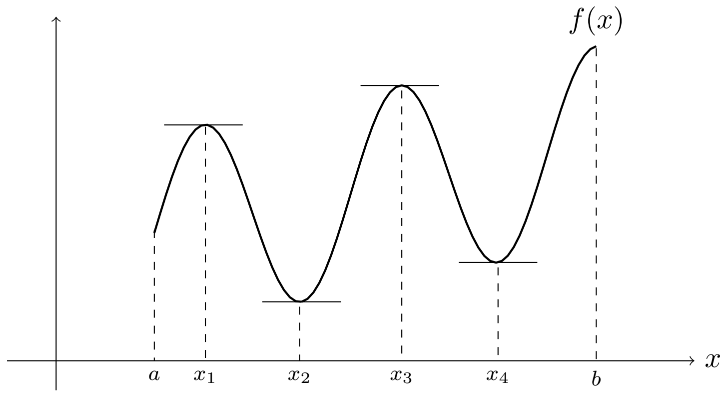


Figura 4.2. Punti di massimo e minimo della funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Massimo assoluto b; minimo assoluto x_2; massimi relativi x_1, x_3, b; minimi relativi a, x_2, x_4. Si noti che nei punti x_1, x_2, x_3, x_4, che sono interni all'intervallo $[a,b]$, la retta tangente al grafico è orizzontale.

Naturalmente un punto di massimo assoluto è anche un punto di massimo relativo, anche se il viceversa non è vero in generale.

Il risultato che mette in relazione massimi, minimi e derivate di f è il seguente. Ricordiamo che se $[a,b]$ è un intervallo chiuso, un punto x_0 si dice *interno* all'intervallo se $a < x_0 < b$, mentre i due punti a e b sono gli *estremi* dell'intervallo.

Teorema 2.2. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto x_0* interno *all'intervallo $[a,b]$. Se x_0 è punto di massimo (o di minimo) relativo di f, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso di un punto di massimo (l'altro caso è analogo). Allora se h è abbastanza piccolo si ha $f(x_0) \geq f(x_0+h)$, e quindi la differenza
$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$
è negativa (per h abbastanza piccolo). Consideriamo ora il rapporto incrementale: se $h > 0$ si ha
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(+)} \leq 0$$
e quindi, applicando il teorema della permanenza del segno, otteniamo
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$
Se invece consideriamo gli $h < 0$, abbiamo
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(-)} \geq 0$$
e quindi allo stesso modo
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$
In conclusione
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$$
□

Osservazione 2.3. Il teorema precedente non garantisce che se la derivata si annulla allora c'è un massimo: per esempio la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata uguale a zero nell'origine ma è sempre strettamente crescente.

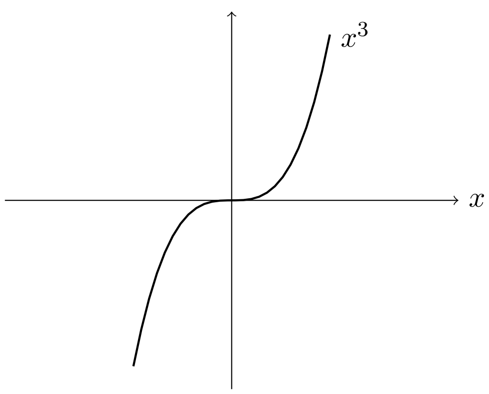


Figura 4.3. La derivata di x^3 si annulla in 0 ma la funzione non ha né massimi né minimi.

Il teorema afferma una cosa diversa: se c'è un punto interno di massimo o minimo, allora lí la derivata deve annullarsi. Questo ci fornisce un modo per cercare dove sono i massimi e i minimi: infatti per una funzione derivabile essi possono trovarsi solo

1) agli estremi dell'intervallo, oppure
2) nei punti interni in cui la derivata si annulla.
Dopo aver trovato tutti i punti in cui la derivata si annulla, dobbiamo esaminarli uno per uno e capire se siano di punti di massimo o di minimo, oppure no; e non si deve dimenticare di studiare quello che succede agli estremi dell'intervallo.

3. Teoremi base del calcolo

Ricordiamo che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato verifica il Teorema di Weierstrass; quindi possiamo trovare sempre un punto in cui f assume un valore maggiore di tutti gli altri, e un punto in cui f assume un valore minore di tutti gli altri. Questi due punti di solito sono distinti; se coincidono allora la funzione deve essere piatta ossia una costante.

Se aggiungiamo l'ipotesi che f sia derivabile otteniamo vari risultati interessanti:

Teorema 3.1 (Teorema di Rolle)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su* $[a,b]$ *e derivabile su* $]a,b[$*. Se* $f(a) = f(b)$ *allora esiste un punto* $c \in\,]a,b[$ *in cui la derivata di annulla:* $f'(c) = 0$*.*

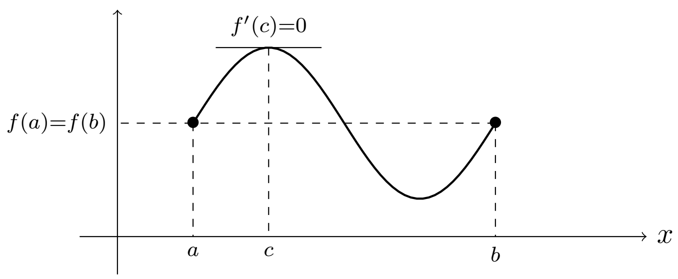


Figura 4.4.

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto su $[a,b]$; sia x_0 il punto di massimo e x_1 il punto di minimo.

Se uno di questi due punti è *interno* all'intervallo $[a,b]$, allora sappiamo che in quel punto la derivata si annnulla, e quindi la dimostrazione è finita.

Se invece nessuno di questi due punti è interno, essi cadono tutti e due agli estremi; ma il valore agli estremi di f è lo stesso, ne segue che $f(a) = f(b) = f(x_0) = f(x_1)$ ossia massimo = minimo. Questo vuol dire che la funzione è costante, e quindi la derivata si annulla in *tutti* i punti. □

Teorema 3.2 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funzioni continue su* $[a,b]$ *e derivabili su* $]a,b[$*. Allora esiste un punto* $c \in]a,b[$ *in cui*

$$f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(x) = f(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g(x) \cdot [f(b) - f(a)].$$

La funzione F è continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$ e la sua derivata è

$$F'(x) = f'(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(x) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Inoltre vediamo subito che

$$F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a).$$

Quindi possiamo applicare il Teorema di Rolle ed otteniamo che esiste un punto $c \in]a,b[$ in cui $F'(c) = 0$, ossia

$$F'(c) = f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(c) \cdot [f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi. □

Teorema 3.3 (Teorema di Lagrange o del valor medio)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora esiste un punto $c \in]a,b[$ in cui*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente ad f e alla funzione $g(x) = x$; le ipotesi sono soddisfatte, quindi per il teorema esiste un punto c in cui vale

$$f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)];$$

ma $g(b) = b$, $g(a) = a$, e chiaramente $g'(x) = (x)' = 1$ in ogni punto, quindi abbiamo ottenuto

$$f'(c) \cdot [b - a] = f(b) - f(a)$$

da cui la tesi. □

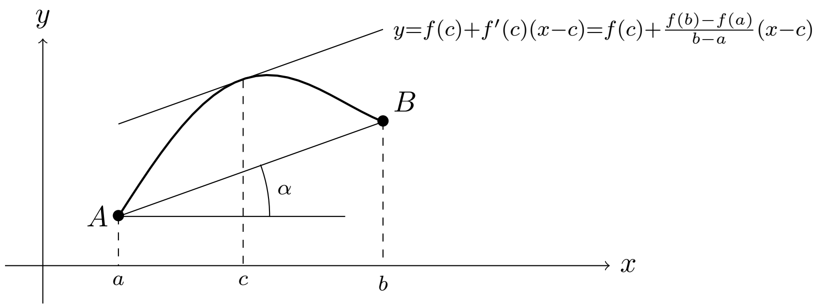


Figura 4.5. Teorema del valor medio: la retta tangente in c è parallela al segmento AB: $f'(c) = \tan(\alpha)$.

Osservazione 3.4. Notiamo che $f'(c)$ si può intepretare come l'inclinazione (il coefficiente angolare) della tangente al grafico per $x = c$; invece il secondo membro è il rapporto incrementale fra i punti $x = a$ e $x = b$, che esprime l'inclinazione della retta passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Il Teorema di Lagrange afferma semplicemente che c'è un punto in cui la tangente al grafico ha la stessa inclinazione della retta passante per A e B.

Il Teorema di Lagrange ha alcune conseguenze della massima importanza:

Corollario 3.5. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su* $[a,b]$ *e derivabile su* $]a,b[$. *Allora*

$$f \quad \textit{è costante} \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[.$$

Dimostrazione. Se la funzione è costante, sappiamo già che la sua derivata si annulla in tutti i punti.

Viceversa, supponiamo che la derivata di f sia zero in tutti i punti. Scegliamo due punti $x_1 < x_2$ qualunque interni all'intervallo, e applichiamo il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$: otteniamo che deve esistere un punto $c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dato che $f'(c) = 0$ per qualunque c, otteniamo che anche il rapporto a secondo membro è uguale a zero, da cui $f(x_1) - f(x_2) = 0$ e quindi $f(x_1) = f(x_2)$. Ma allora abbiamo dimostrato che presi due punti qualunque il valore di f in essi è lo stesso, quindi f è costante. □

Corollario 3.6. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su* $[a,b]$ *e derivabile su* $]a,b[$. *Allora*

(i) f *è crescente* $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ *;*

(ii) f *è decrescente* $\iff f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[$.

Dimostrazione. Dimostreremo solo il caso (i), il secondo è completamente analogo.

Se f è crescente, il numeratore e il denominatore del rapporto incrementale hanno sempre lo stesso segno: quando $h > 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(+)}{(+)} \geq 0$$

e quando $h < 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(-)} \geq 0.$$

Quindi anche il limite del rapporto incrementale cioè la derivata, deve essere sempre positivo.

Viceversa, supponiamo che la derivata sia sempre positiva. Procedendo come nel corollario precedente, scegliamo due punti $x_1 < x_2$ qualunque interni all'intervallo, e applichiamo il Teorema di Lagrange su $[x_1, x_2]$: otteniamo che deve esistere un punto $c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ora sappiamo che $f'(c) \geq 0$ per qualunque punto, e quindi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

da cui, moltiplicando per $x_2 - x_{1>0}$,

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1).$$

Pertanto abbiamo dimostrato che presi due punti qualunque x_1 e x_2,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

cioè la funzione è crescente. □

Esempio 3.7. Calcoliamo il minimo della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$. La funzione è sempre positiva e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. La derivata è uguale a $e^x - e^{-x}$ e si annulla quando $e^x = e^{-x}$, ossia quando $x = -x$. Dunque la derivata si annulla solo per $x = 0$ ed in tale punto si ha $f(0) = 2$.

Notiamo che dalle relazioni $e^x \geq 1 + x$ e $e^{-x} \geq 1 - x$ segue immediatamente che

$$e^x + e^{-x} \geq (1 + x) + (1 - x) = 2 \quad \text{per ogni} \quad x \; .$$

Esercizi.

Esercizio 4.4 (▶▶|). Dire quali tra le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

$$x^2 - 3, \quad x^3 + x^2 + 4, \quad x^2 - |x|, \quad x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \cos x + \sin(x^2), \quad \tan(\pi x).$$

Esercizio 4.5. Calcolare il minimo assoluto della funzione $2^x + 2^{-x}$.

4. Teorema di de l'Hôpital

L'uso delle derivate permette in molti casi di calcolare con facilità dei limiti indeterminati. Il seguente risultato ad esempio si può utilizzare per calcolare i limiti della forma $\frac{0}{0}$:

Teorema 4.1 (Teorema di de l'Hôpital)**.** *Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$. Sia $x_0 \in\,]a, b[$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e sia $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$. Allora, se esiste il limite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, e i due limiti coincidono:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Cauchy alle due funzioni f e g sull'intervallo di estremi x_0 e x; ne segue che esiste un punto z intermedio tale che

$$f'(z) \cdot [g(x) - g(x_0)] = g'(z) \cdot [f(x) - f(x_0)].$$

Dato che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ la relazione si semplifica:

$$f'(z)g(x) = g'(z)f(x)$$

e dividendo per $g'(z) \neq 0$ otteniamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Se ora calcoliamo il limite per $x \to x_0$, e osserviamo che anche $z \to x_0$ in quanto è compreso fra x e x_0, otteniamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

ossia la tesi. □

Osservazione 4.2. Il teorema è valido in molti altri casi:
1) per i limiti indeterminati della forma $\frac{\infty}{\infty}$;
2) per i limiti destri;
3) per i limiti sinistri;
4) per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.
Non dimostreremo tutti i casi ma utilizzeremo le altre varianti del teorema in tutte le situazioni utili.

Osservazione 4.3. Verifichiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Si tratta di un limite indeterminato $0/0$, e dato che il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

esiste ed è uguale a 1, anche il limite di partenza ha come risultato 1.
Altra verifica:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Si tratta di un limite indeterminato ∞/∞. Il limite del rapporto delle derivate esiste:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

e questo conclude il calcolo.

Osservazione 4.4. Talvolta una prima applicazione del teorema dà luogo ancora ad un limite indeterminato; ma se si continua ad applicare il teorema passando alle derivate seconde (o terze ecc.) spesso si arriva ad un limite non indeterminato e quindi il metodo funziona ancora. Un esempio: calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Il rapporto delle derivate

$$\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

è ancora un limite indeterminato; possiamo riapplicare il teorema e derivare ancora una volta numeratore e denominatore:

$$\frac{-\sin x}{6x};$$

ancora un limite indeterminato! (anche se sappiamo calcolarlo benissimo). Derivando per l'ultima volta otteniamo

$$\frac{-\cos x}{6} \quad \text{che tende a} \quad -\frac{1}{6}$$

e quindi il limite di partenza è uguale a $-\frac{1}{6}$.

Il Teorema di de l'Hôpital si può applicare anche al calcolo di limiti indeterminati della forma $0 \cdot \infty$. Ad esempio, per calcolare il

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x$$

possiamo scrivere

$$x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

e in questo modo abbiamo scritto il limite nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; quindi derivando numeratore e denominatore

$$\frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -x$$

il limite diventa semplicemente

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = - \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

Esercizi.

Esercizio 4.6. Calcolare i limiti seguenti (attenzione! controllare prima che siano effettivamente limiti indeterminati; se non lo sono, non si deve applicare il Teorema di de l'Hôpital!).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 16} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \quad \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + x}{-2x^3 + x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + x}{-2x^3 + x}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^3}, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x^2)}{x^3}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin x)}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x - x^3)}{x}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{x - 2}{x^3 - 5x + 2}, \quad \lim_{x \to 1^\pm} \frac{x - 2}{x^3 - 5x + 2}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{3x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{\sin(x^2)}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{x^4}, \quad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2 - \sin x}{x^3}.$$

Esercizio 4.7. Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot \log x, \qquad \lim_{x \to 0^+} \log x \cdot \sin x, \qquad \lim_{x \to +0^+} x \log(x - x^2)$$

5. Studio di funzioni

Ormai abbiamo a disposizione molti strumenti per studiare il comportamento di una funzione e disegnarne il grafico approssimativo. Lo studio approfondito di una funzione può essere molto complesso; ma noi considereremo solo esempi piuttosto semplici, per i quali i passi seguenti forniscono informazioni sufficienti a comprendere l'andamento del grafico: data una funzione $f(x)$ espressa come combinazione di funzioni elementari,

(1) stabilire l'insieme di definizione dell'espressione; di norma l'insieme di definizione è l'unione di un numero finito di intervalli;
(2) verificare se la funzione è pari, dispari, periodica;
(3) se possibile, stabilire se la funzione ha degli zeri, e dove è positiva e negativa;
(4) calcolare i limiti della funzione agli estremi degli intervalli di definizione;
(5) a questo punto è già possibile iniziare a disegnare un grafico molto approssimativo che può servire da guida nei calcoli successivi;
(6) calcolare (se possibile) la derivata f' e calcolare (se possibile) i suoi zeri eventuali;
(7) determinare gli intervalli in cui la derivate è positiva o negativa e quindi gli intervalli di crescenza e decrescenza di f;
(8) trovare eventuali massimi e minimi della funzione;
(9) a questo punto, completare il grafico della funzione riportando gli elementi calcolati.

Attenzione: per certe funzioni, può accadere che qualcuna delle proprietà precedenti sia troppo difficile da studiare; in questo caso semplicemente se ne fa a meno e si cerca di capire il comportamento della funzione usando solo le altre. Ad esempio, spesso è molto difficile calcolare dove si annulla una funzione, ma conoscere il valore degli zeri non è essenziale per lo studio approssimativo.

Se la funzione contiene dei moduli, si consiglia come operazione preliminare di suddividere il dominio in zone in cui è possibile risolvere i moduli, e studiare separatamente le funzioni ottenute.

Esempio 5.1. Studio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}.$$

L'espressione non è definita se $x = 0$ ma tutti gli altri punti non presentano problemi, quindi l'insieme di definizione è

$$\text{I.D.} \ = \ \{x \neq 0\}.$$

La funzione non è né pari né dispari, inoltre non si annulla mai. Vediamo subito che il segno della funzione è esattamente il segno di x dato che l'esponenziale è positivo:

$$f(x) > 0 \ \text{ per } \ x > 0, \qquad f(x) < 0 \ \text{ per } \ x < 0.$$

Calcoliamo i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, ossia studiamo i limiti per $x \to \pm\infty$ e $x \to \pm 0$. Per $x \to +\infty$ la funzione $1/x \to 0$ quindi abbiamo subito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^0 = 0$$

e allo stesso modo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^0 = 0.$$

Inoltre
$$x \to 0^+ \implies \frac{1}{x} \to +\infty$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$
Per finire
$$x \to 0^- \implies \frac{1}{x} \to -\infty, \quad e^{\frac{1}{x}} \to 0$$
e quindi ci troviamo davanti alla forma indeterminata $(-\infty)\cdot 0$; ma dopo il cambiamento di variabile
$$y = \frac{1}{x}$$
il limite si trasforma in
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} y e^y = 0.$$
Conoscendo i limiti e il segno della funzione, possiamo già azzardare un grafico molto approssimativo:

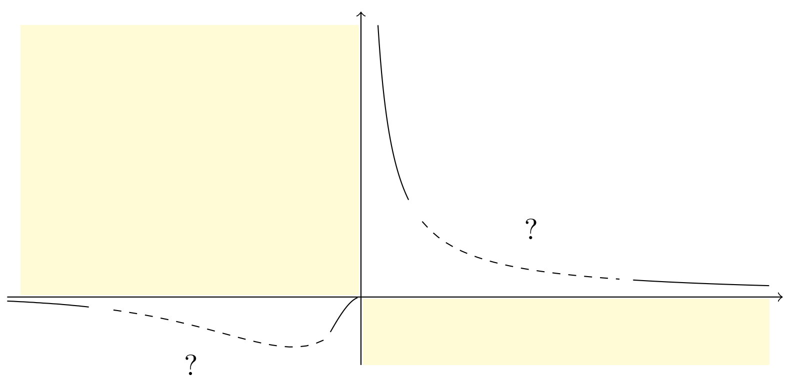


FIGURA 4.6. Comportamento agli estremi del grafico di $\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

Anche se è impreciso, il grafico suggerisce che la funzione potrebbe avere un minimo relativo in un certo $x < 0$. Per andare avanti calcoliamo la derivata:
$$\left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x+1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$
ossia
$$f'(x) = -\frac{x+1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}.$$
La derivata si annulla quando si annulla $(x+1)$ cioè
$$f'(x) = 0 \iff x = -1.$$
Studiamo poi il segno di f'; l'esponenziale è sempre positivo, quindi basta studiare il segno di
$$-\frac{x+1}{x^3}.$$

Vediamo $(x+1)$ è positivo per $x > -1$ e negativo per $x < -1$. mentre x^3 ha lo stesso segno di x, quindi

$$f'(x) > 0 \ \text{ per } \ -1 < x < 0, \qquad f'(x) < 0 \ \text{ altrove.}$$

Allora possiamo concludere che

$$f \text{ è crescente su } -1 < x < 0, \text{ decrescente su } x < -1 \text{ e } x > 0$$

e naturalmente

$$f \text{ ha un minimo per } x = -1.$$

In conclusione abbiamo sufficienti elementi per tracciare il grafico:

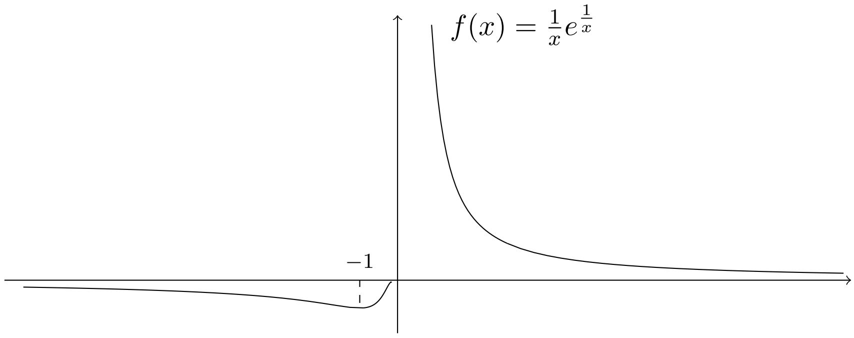


FIGURA 4.7. Grafico della funzione $\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

Esempio 5.2. Studio della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-9}.$$

La funzione è definita come rapporto di due polinomi; l'unico problema è il denominatore che potrebbe annullarsi. Quindi l'insieme di definizione è dato dalla condizione

$$x^2 - 9 \neq 0 \iff x \neq \pm 3.$$

La funzione è pari: infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)^2-9} = \frac{x^2+2}{x^2-9} = f(x).$$

Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Il numeratore x^2+2 non si annulla mai ed è sempre strettamente positivo, quindi la funzione $f(x)$ non può mai essere uguale a zero, ed ha lo stesso segno del denominatore:

$$x^2 - 9 > 0 \iff x > 3 \ \text{ oppure } \ x < -3$$

e quindi

$$f(x) > 0 \iff x > 3 \ \text{ oppure } \ x < -3$$
$$f(x) < 0 \iff -3 < x < 3.$$

Calcoliamo i limiti agli estremi degli intervalli di definizione: dato che i punti esclusi sono $x = \pm 3$, dobbiamo calcolare sei limiti:

$$x \to \pm\infty, \qquad x \to -3^{\pm}, \qquad x \to 3^{\pm}.$$

I primi due si ottengono mettendo in evidenza il grado massimo:

$$\frac{x^2+2}{x^2-9} = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}$$

e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

Calcoliamo i limiti per $x \to 3^{\pm}$. Quando $x \to 3^+$ il denominatore tende a 0 ed è positivo, ossia

$$x - 3 \to 0^+$$

mentre il numeratore tende a 11, quindi la funzione tende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty.$$

Quando $x \to 3^-$ il denominatore tende a 0 ed è negativo, ossia

$$x - 3 \to 0^-$$

mentre il numeratore tende a 11, quindi la funzione tende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Ora calcoliamo i limiti per $x \to -3^{\pm}$. Quando $x \to -3^+$ il denominatore tende a 0 ed è negativo, ossia

$$x - 3 \to 0^-$$

mentre il numeratore tende sempre a 11, quindi la funzione tende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty.$$

Quando $x \to -3^-$ il denominatore tende a 0 ed è positivo, ossia

$$x - 3 \to 0^+$$

mentre anche stavolta il numeratore tende a 11, quindi la funzione tende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty.$$

Possiamo tracciare un primo grafico molto approssimativo basandoci sui limiti calcolati:

Per verificare i nostri sospetti sulla forma del grafico calcoliamo la derivata: otteniamo subito

$$f'(x) = -\frac{22x}{(x^2-9)^2}$$

e vediamo che f' si annulla soltanto per $x = 0$, mentre

$$f' < 0 \iff x > 0, \qquad f' > 0 \iff x < 0,$$

ossia

$$f \text{ è crescente per } x < 0 \text{ e decrescente per } x > 0.$$

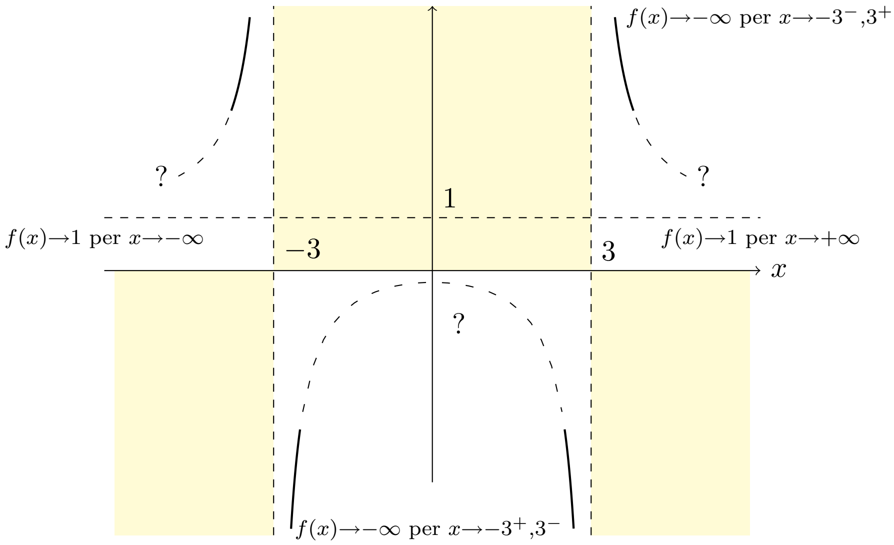


FIGURA 4.8. Limiti agli estremi della funzione $\dfrac{x^2+2}{x^2-9}$.

In particolare, abbiamo

$$x = 0 \ \text{ è un punto di massimo locale.}$$

Ora possiamo tracciare il grafico di f:

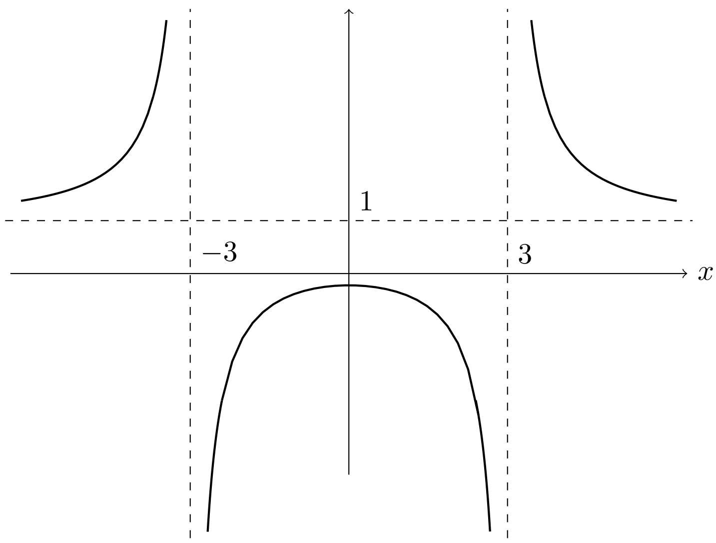


FIGURA 4.9. Grafico della funzione $\dfrac{x^2+2}{x^2-9}$.

Esercizi.

Esercizio 4.8. Studiare le funzioni elencate nell'Esercizio 3.11 e tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 4.9. Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico approssimativo.

$$xe^x, \qquad xe^{-x}, \qquad xe^{1/x}, \qquad e^{-1/x}, \qquad e^{-x^2}, \qquad x^3 - x, \qquad \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$2x + |x|, \qquad xe^{-1/x}, \qquad x^x, \qquad \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad \frac{1}{e^{2x}}, \qquad \frac{x^2}{e^{2x}}, \qquad \frac{1}{x}e^{x-1}$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad \log\left(\frac{1}{2-x}\right), \qquad e^{\frac{1}{x-2}}, \qquad e^{\frac{x}{x+1}}, \qquad \log(e^x - 1)$$

$$e^{x^2-x}, \qquad e^{2x^2-x^3}, \qquad \frac{x}{2x-3}, \qquad \frac{x^2}{2-x}, \qquad \frac{x+1}{x^2-1},$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad (x-1)e^{1/x}, \qquad \frac{x}{x^2-4}, \qquad \frac{e^x}{x-2},$$

$$\frac{x+1}{e^x}, \qquad \frac{x}{e^{2/x}}, \qquad \frac{x^2}{e^{1/x}}, \qquad \log(1 - e^x), \qquad \log(x^2 - 2x + 3)$$

$$x \log x, \qquad \log(2 - 2x^2), \qquad x \log \frac{1}{x}, \qquad x \log\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad \frac{e^{-x} - 1}{e^x}, \qquad \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}, \qquad \frac{1}{(x+2)(x-2)},$$

$$\sqrt{1-2x}, \qquad \frac{1}{|x|}, \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad (x-1)^2 - \log x, \qquad e^{x+1/x},$$

$$\log(x + x^2), \qquad \sqrt{1+x^2}, \qquad \sqrt{1-e^{-x}}, \qquad \log(e^x + e^{-x})$$

$$|x| + |x-1|, \qquad x + |x|, \qquad |x-1| + |2x+3|, \qquad (x + |3 - 2x|)^2.$$

CAPITOLO 5

Integrali

L'allenatore Boskov diceva che "rigore è quando arbitro fischia". Questa definizione di calcio di rigore è formalmente ineccepibile e stronca sul nascere qualsiasi discussione moviolistica. Tuttavia, dovendo insegnare le regole del calcio ad un extraterrestre appena arrivato, con l'intenzione di farlo appassionare a questo sport, è preferibile dire "rigore è quando il difensore commette fallo nella propria area" ben sapendo che questa definizione potrebbe generare lunghe discussioni al Bar dello Sport.

Naturalmente, dobbiano poi dare al nostro interlocutore alieno l'idea più dettagliata possibile di cosa sia un fallo, e qui potremo istruirlo con tanti esempi concreti di spintoni, sgambetti, pestoni, trattenute, gomitate in faccia eccetera.

Per la definizione di integrale definito ci troviamo nella stessa situazione. Un fan di Boskov potrebbe scrivere nei suoi testi di calcolo una frase formalmente ineccepibile del tipo: *l'integrale definito di una funzione è l'estremo superiore delle somme integrali inferiori, qualora esso coincida con l'estremo inferiore delle somme integrali superiori.*

Se invece vogliamo lanciare un messaggio più esplicativo, anche a costo di generare casi dubbi, possiamo dire che:

L'integrale definito di una funzione positiva è l'area della regione compresa tra il grafico della funzione stessa e l'asse delle ascisse.

Prima di spiegare meglio questo concetto, soffermiamoci un po' sulla nozione di area. Secondo il dizionario, l'area è la misura di una estensione superficiale; sappiamo tutti che l'area di un rettangolo è base per altezza, quella di un triangolo è base per altezza diviso 2, mentre quella del cerchio è raggio al quadrato per pi greco.

Il concetto di area si applica anche a figure un po' più complesse e possiamo dire che l'area di una regione del piano è proporzionale alla quantità di vernice necessaria per pitturarla, oppure che è proporzionale al numero di mattonelle quadrate necessarie per ricoprirla, oppure ancora, e questo è il paragone più utile, supponete di avere una regione nel vostro giardino e fatela diventare una piscina costruendo un muretto lungo tutto il suo perimetro. Allora l'area della regione è proporzionale alla quantità di acqua necessaria per riempire la piscina.

Cosa succede però se il muretto costruito sul bordo della piscina ha delle discontinuità, ossia delle crepe? In tal caso l'acqua esce e l'area potrebbe non esssere misurabile. La morale è la seguente: affinché sia possibile lavorare con uno dei concetti intuitivi di area appena esposti, bisogna evitare di avere perimetri discontinui, cioè bisogna limitarsi a considerare regioni del piano il cui bordo è una unione finita di curve continue, ossia di curve che è possibile disegnare senza staccare la matita dal foglio.

Osserviamo infine che l'area di una regione del piano è invariante per movimenti rigidi, cioè la misura della superfice di una figura non cambia se la ruotiamo oppure se la spostiamo in alto/basso/destra/sinistra lasciandone però inalterate forma e dimensioni. Dopo aver parlato di area, ritorniamo alla definizione di integrale.

1. La definizione di integrale definito

Definizione 1.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[a,b]$ e positiva, cioè $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Chiameremo *integrale definito della funzione f nell'intervallo* $[a,b]$ (frase spesso abbreviata in "integrale di f da a a b") il numero che misura l'area della regione del piano delimitata, in basso dall'asse delle ascisse, in alto dal grafico di f, a destra dalla retta $x = b$ ed a sinistra dalla retta $x = a$ (vedi Figura 5.1).

Nelle formule matematiche l'integrale di f da a a b viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx.$$

I punti a, b sono detti *estremi di integrazione* e sono caratterizzanti dell'integrale definito. Definiremo più avanti l'integrale indefinito che si differenzierà da quello definito anche per la mancanza degli estremi di integrazione.

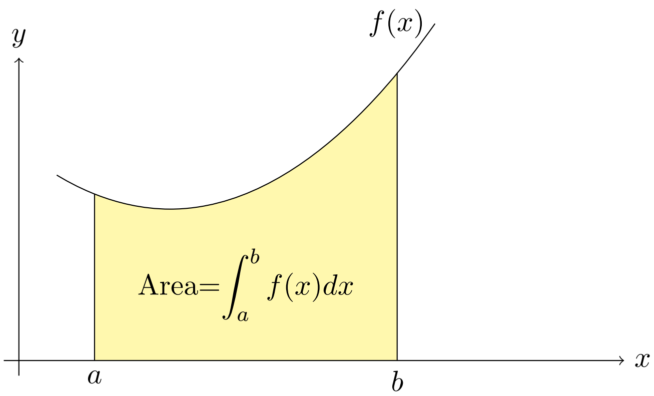


FIGURA 5.1. L'integrale definito è l'area della porzione di piano colorata.

Esempio 1.2. Sia c un numero reale positivo. Allora la funzione costante $f(x) = c$ è continua sull'intervallo $[a,b]$ e per definizione l'integrale di c da a a b è l'area del rettangolo di altezza c che ha come base il segmento $[a,b]$ e quindi (vedi Figura 5.2)

$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

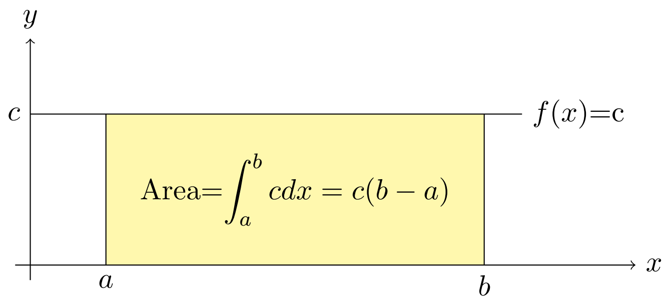


FIGURA 5.2. Integrale definito di funzioni costanti.

Esempio 1.3. Sia c un numero reale positivo. Allora la funzione $f(x) = cx$ è continua sull'intervallo $[0, a]$ e per definizione l'integrale di cx da 0 ad a è l'area del triangolo rettangolo di base $[0, a]$ ed altezza ac e quindi (vedi Figura 5.3)

$$\int_0^a cxdx = \frac{1}{2}ca^2.$$

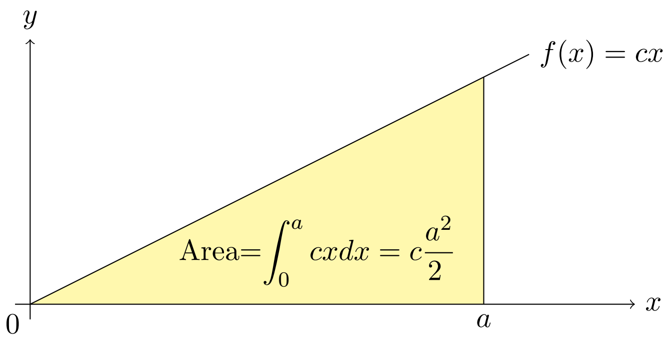
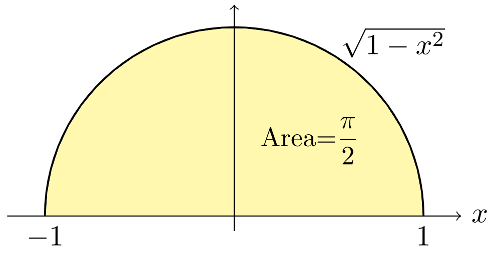


FIGURA 5.3.

Esempio 1.4. La regione del piano compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione

$$f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

è un semicerchio di raggio 1



e dunque $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Se gli estremi di integrazione coincidono, allora l'integrale è sempre uguale a 0. Infatti $\int_a^a f(x)dx$ è l'area di una regione del piano che è contenuta nella retta $x = a$ e tale regione ha misura superficiale nulla.

Il simbolo dx che compare nel simbolo dell'integrale si chiama *differenziale di x* ed ha varie funzioni. La prima è quella di delimitare a destra la cosiddetta *funzione integranda*, cioè la funzione in x rappresentata da tutto quello che è compreso tra i simboli $\displaystyle\int_a^b$ e, appunto, dx. Quindi il differenziale permette tra l'altro di non fare confusione tra

$$\int_0^2 (2+3)dx \quad \text{e} \quad \int_0^2 2dx + 3.$$

Siano c un numero reale positivo e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa. Allora l'integrale

$$\int_a^b (f(x)+c)dx$$

è l'area della figura unione del rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza c e della figura ottenuta muovendo di c unità in alto la regione delimitata dal grafico di f. Si ha dunque (vedi Figura 5.4)

$$\int_a^b (f(x)+c)dx = \int_a^b f(x)dx + c(b-a)\ . \tag{1.1}$$

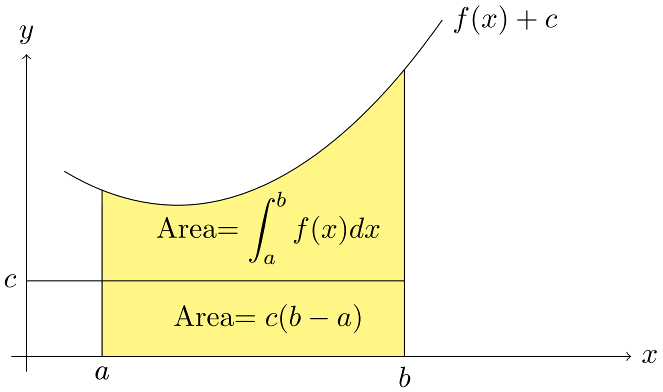


FIGURA 5.4.

Vogliamo adesso dare un significato all'integrale di una qualsiasi funzione continua che assuma possibilmente anche valori negativi. Ebbene, se vogliamo che la Condizione (1.1) continui a valere per ogni $c \in \mathbb{R}$ e per ogni f continua sull'intervallo $[a,b]$, allora c'è un unico modo per definire l'integrale: il seguente.

Definizione 1.5. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = A - B,$$

dove A è l'area della regione delimitata in basso dall'asse delle ascisse ed in alto dal grafico di f, mentre B è l'area della regione delimitata in basso dal grafico di f ed in alto dall'asse delle ascisse (vedi Figura 5.5).

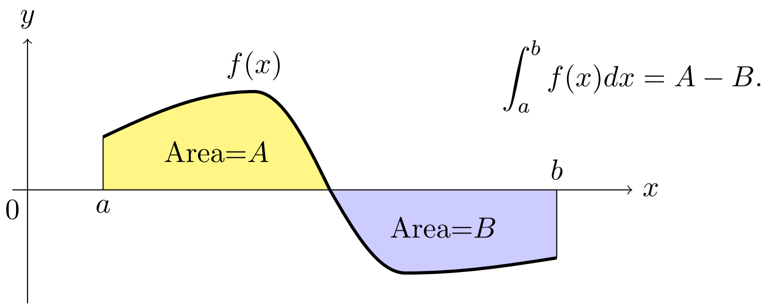


FIGURA 5.5.

Esempio 1.6. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva. Allora la regione compresa tra il grafico di $-f$ e l'asse delle ascisse è speculare, e quindi ha la stessa area, della regione compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico di f (vedi Figura 5.6). Ne deduciamo pertanto che

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

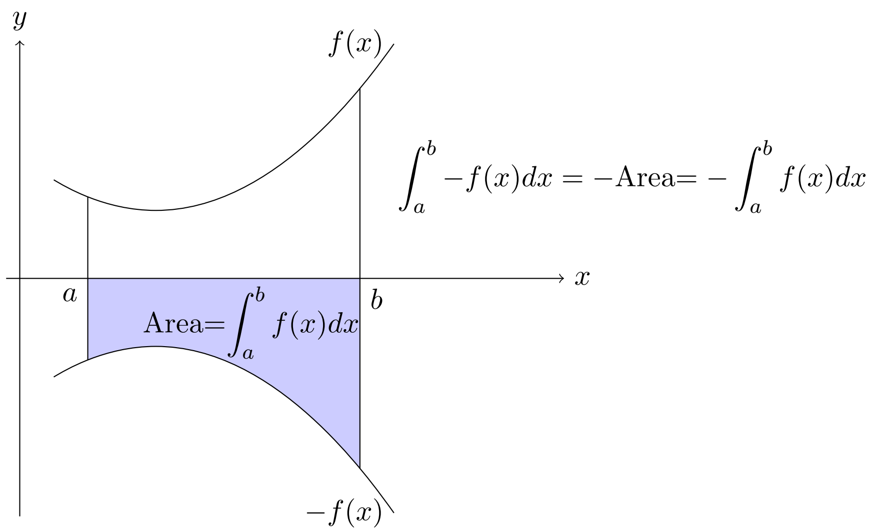


FIGURA 5.6.

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, quando scriviamo $\int_a^b f(x)dx$ per indicare l'integrale significa che noi abbiamo deciso di chiamare x la coordinata su $[a,b]$. È chiaro che l'integrale non dipende da come noi decidiamo di chiamare una certa cosa, per cui se cambiamo idea e chiamiamo t la coordinata, si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Lo stesso vale se invece di t usiamo un qualsiasi altro nome y, z, u, w eccetera.

2. Prime proprietà dell'integrale definito

Vogliamo trovare una regola che ci permetta di calcolare gli integrali definiti e per fare questo bisogna studiarne prima le principali proprietà.

Lemma 2.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

(1) *Se f è positiva, allora* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

(2) *Se f è negativa, allora vale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0.$

Spiegazione. Per definizione, l'integrale di una funzione positiva è una misura di superfice ed è quindi un numero ≥ 0. Se invece f è negativa, allora $-f$ è positiva e basta ricordare che

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

□

Lemma 2.2. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia c un punto dell'intervallo $[a,b]$. Allora vale*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Spiegazione. Basta osservare che la retta $x = c$ divide in due parti la regione del piano delimitata, in basso dall'asse delle ascisse, in alto dal grafico di f, a destra dalla retta $x = b$ ed a sinistra dalla retta $x = a$ (vedi Figura 5.7). Ne segue che l'area totale (che per definizione è $\int_a^b f(x)dx$) è uguale alla somma delle aree delle regioni situate a sinistra ed a destra della retta $x = c$, ossia uguale alla somma di $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$. □

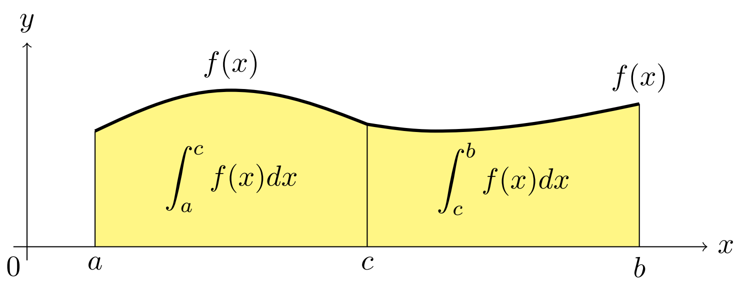


Figura 5.7.

Lemma 2.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e denotiamo con $m = \min(f)$ e $M = \max(f)$ rispettivamente il minimo ed il massimo di f nell'intervallo $[a,b]$. Allora vale*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - m$. Per definizione di minimo la funzione g è positiva e quindi pure il suo integrale è ≥ 0. Possiamo quindi scrivere, tenendo conto della condizione (1.1),

$$0 \leq \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - m)dx = \int_a^b f(x)dx - m(b-a),$$

da cui segue la prima disuguagliaza $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$. Similmente la funzione $h(x) = f(x) - M$ è negativa ed il suo integrale è ≤ 0. Dunque

$$0 \geq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b (f(x) - M)dx = \int_a^b f(x)dx - M(b-a),$$

da cui segue la seconda disuguagliaza $M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx$. □

Definizione 2.4. La *media integrale* di una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è uguale al numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Il significato geometrico della media integrale è il seguente. Supponiamo che f sia positiva e costruiamo il rettangolo che ha come base il segmento $[a,b]$ ed ha come area l'integrale di f. Se h è l'altezza di tale rettangolo, allora $h(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ e quindi h coincide con la media integrale di f.

Teorema 2.5 (Teorema della media integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $m = \min(f)$ e $M = \max(f)$ rispettivamente il minimo ed il massimo di f nell'intervallo $[a,b]$. Abbiamo visto che vale

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Dividendo tutto per $b-a$ si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

D'altra parte f è continua e per il teorema dei valori intermedi (Teorema 7.9) assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo; in particolare esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi)$ è uguale alla media integrale di f. □

Esercizi.

Esercizio 5.1. Utilizzando la definizione 1.1 di integrale definito di una funzione positiva, calcolare i seguenti integrali

$$\int_2^5 \pi dx, \qquad \int_0^5 2xdx, \qquad \int_0^1 2x+3dx, \qquad \int_{-1}^1 x+1dx, \qquad \int_1^2 3x-1dx.$$

Esercizio 5.2. Utilizzando la definizione 1.5 di integrale definito di una funzione continua, calcolare i seguenti integrali

$$\int_2^5 -\pi dx, \qquad \int_{-1}^3 2x dx, \qquad \int_{-2}^0 2x+3dx, \qquad \int_{-3}^0 x+1dx, \qquad \int_0^1 3x-1dx.$$

Esercizio 5.3. Risolvere i seguenti integrali definiti calcolando le aree delle regioni delimitate:

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx, \qquad \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\, dx, \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\, dx\ .$$

Esercizio 5.4 (⏭). Sia $A = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Una sola delle seguenti affermazioni è vera: quale?

$\boxed{\text{A}}$ $0 < A < e^{-1}$ $\boxed{\text{B}}$ $e^{-1} < A < 1$ $\boxed{\text{C}}$ $A < 0$ $\boxed{\text{D}}$ $A > 1$ $\boxed{\text{E}}$ $A = e^{-1}$

Nota: per rispondere occorre un ragionamento che fa intervenire il teorema della media integrale.

3. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $a < b$, allora per ogni funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definiamo per convenzione

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

(notare lo scambio degli estremi di integrazione).

Teorema 3.1 (Teorema fondamentale del calcolo)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e consideriamo la funzione $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Allora la funzione G è continua in $[a,b]$, è derivabile in $]a,b[$ e la sua derivata è uguale a

$$G'(x) = f(x), \qquad \textit{per ogni } x \in]a,b[.$$

Spiegazione. Poiché ogni funzione derivabile è anche continua, basta provare che G è derivabile e che la sua derivata è uguale a f. Per definizione

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right).$$

Ricordando che

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

otteniamo

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

che per il teorema della media integrale diventa

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(\xi(h)),$$

dove per ogni h, il numero ξ è compreso tra x e $x+h$ (vedi Figura 5.8). Infine, siccome f è continua si ha

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x).$$

□

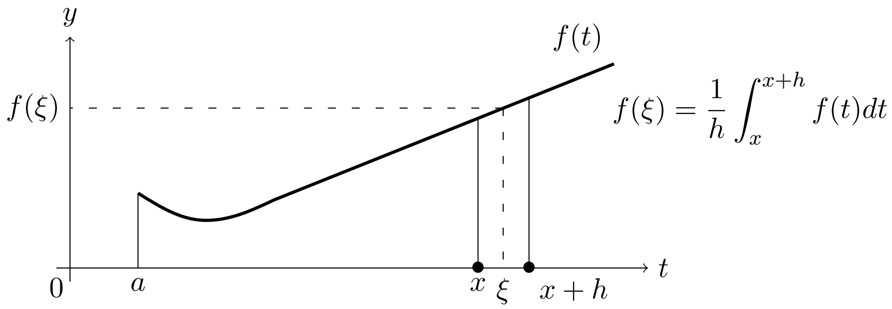


FIGURA 5.8.

Definizione 3.2. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in $]a,b[$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in\ ]a,b[$. Allora diremo che F è una *primitiva* di f sull'intervallo $[a,b]$.

Se diciamo che F è una primitiva di f, senza fare riferimento ad intervalli, intendiamo che $F'(x) = f(x)$ in tutti i punti dove F è derivabile. Ad esempio $-1/x$ è una primitiva della funzione $1/x^2$, mentre e^x è una primitiva della funzione e^x.

Corollario 3.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f sull'intevallo $[a,b]$. Allora vale la formula*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione

$$H\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad H(x) = F(x) - \int_a^x f(t)dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo, la funzione H è derivabile con derivata

$$H'(x) = F'(x) - f(x) = 0.$$

Abbiamo dimostrato che le uniche funzioni derivabili a derivata nulla su un intervallo sono le costanti e quindi H è costante. In particolare $H(a) = H(b)$ che significa

$$F(a) = F(b) - \int_a^b f(t)dt.$$

□

In buona sostanza, il Corollario 3.3 implica che:

Per calcolare l'integrale di f da a a b è sufficiente trovare una primitiva F di f e calcolare la differenza $F(b) - F(a)$.

In formule

$$F'(x) = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b,$$

dove, se $F(x)$ è una qualsiasi funzione e a, b sono numeri reali, si denota con

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Esempio 3.4. La funzione $\dfrac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2 e quindi

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 3.5. La funzione $\log x$ è una primitiva di $1/x$ e quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^e = \log(e) - \log(1) = 1 - 0 = 1.$$

Esempio 3.6. La funzione $\sin x$ è una primitiva di $\cos x$ e quindi

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x) dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1.$$

Esempio 3.7. La funzione $-\log(\cos x)$ è una primitiva di $\tan x$ e quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} (\tan x) dx = [-\log(\cos x)]_0^{\pi/4} &= -\log(\cos(\pi/4)) + \log(\cos(0)) \\ &= -\log(1/\sqrt{2}) + \log(1) = \log(\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Esempio 3.8. La funzione $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è una primitiva di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Quindi

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Prima di passare all'integrale indefinito, osserviamo che il Teorema 3.1 dice esattamente che per ogni funzione continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, la funzione

$$G\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

è una primitiva di $f(x)$. Ne deduciamo in particolare che ogni funzione continua possiede delle primitive.

Lemma 3.9. *Siano $F, G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due primitive della stessa funzione continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora F e G differiscono per una costante additiva.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $H(x) = F(x) - G(x)$, la sua derivata $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ è identicamente nulla e quindi, per il Corollario 3.5, la funzione H è costante. $\square$

4. L'integrale indefinito

L'*integrale indefinito* di una funzione continua f si indica con

$$\int f(x)dx$$

ed è per definizione l'insieme di tutte le primitive della funzione f.
Abbiamo visto che, se f è continua su di un intervallo, allora f possiede primitive e due primitive di f differiscono per una costante additiva.

Pertanto, se F è una primitiva di una funzione continua f definita in un intervallo scriveremo

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

dove $F(x) + C$ sta ad indicare l'insieme delle funzioni della forma $F(x) + c$, con c costante.

Dalle regole di derivazione seguono immediatamente i seguenti integrali indefiniti

$$\int 1dx = x + C, \qquad \int xdx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C, \qquad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \quad a \neq 0.$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \qquad \int \sin(x)dx = -\cos(x) + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C.$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C, \qquad \int \sin(ax)dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

Se la funzione f è definita sull'unione di due intervalli, allora $\int f(x)dx$ può assumere diversi valori su ciascun intervallo. Ad esempio, la funzione $1/x$ è definita nell'unione dei due intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e vale

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log(x) + C & \text{per } x > 0, \\ \log(-x) + C & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Il simbolo C nella espressione $\int f(x)dx = F(x) + C$ serve solamente a ricordare che le primitive di f sono tutte uguali a F più una costante.
Per semplicità notazionale, da ora in poi, se F è una primitiva di f scriveremo

$$\int f(x)dx = F(x)$$

lasciando sottinteso il simbolo C.
Osserviamo che, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e c è una costante, allora $cF(x)$ è una primitiva di $cf(x)$ e quindi si ha

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx,$$

ossia le costanti moltiplicative si possono portare fuori dal segno di integrale indefinito. Ad esempio:

$$\int 2x dx = 2\int x dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^2,$$

$$\int 3\sqrt{x} dx = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx = 3\left(\frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1}\right) = 2x^{3/2} = 2x\sqrt{x}.$$

Se F, G sono primitive di f, g rispettivamente, allora $F+G$ è una primitiva di $f+g$ e quindi si ha

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

La regole da adottare e ricordare sono quindi che:

L'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali.

Le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dal segno di integrazione.

Ad esempio

$$\int (x+1) dx = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x,$$

$$\int 4x dx = 4\int x dx = 4\frac{x^2}{2} = 2x^2,$$

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int e^x dx + \int e^{-x} dx\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int e^x dx - \int e^{-x} dx\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Le funzioni

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

si chiamano rispettivamente *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*; sono una la derivata dell'altra e conseguentemente sono una la primitiva dell'altra.

Esempio 4.1. Calcoliamo l'integrale della funzione $f(x) = (x^2 + \pi)/x$. Si ha

$$\int \frac{x^2 + \pi}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} dx + \int \frac{\pi}{x} dx = \int x dx + \pi \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \pi \log(x).$$

Esempio 4.2.

$$\int \tan^2(x) dx = \int (\tan^2(x) + 1) - 1 dx = \int (\tan^2(x) + 1) dx - \int dx = \tan(x) - x.$$

Le formule

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}, \qquad a \neq 0,$$

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}, \qquad p \neq -1.$$

sono valide anche per a, p numeri reali: abbiamo quindi ad esempio

$$\int 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6},$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x},$$
$$\int 2^x dx = \int e^{x\log(2)}dx = \frac{1}{\log(2)}e^{x\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}2^x,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x}.$$

Esercizi.

Esercizio 5.5. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int 10^{21}dx, \qquad \int \frac{x}{\pi}dx, \qquad \int e^4e^x dx, \qquad \int 10^{-12}e^{-x}dx,$$
$$\int 18\cos(x)dx, \qquad \int \frac{\sin(x)}{2}dx, \qquad \int \frac{9}{1+x^2}dx, \qquad \int \frac{1}{4\cos^2(x)}dx,$$
$$\int 2\cos(2x)dx, \qquad \int 7\sin(2x)dx, \qquad \int 2e^{5x}dx, \qquad \int 5x^{25000}dx,$$
$$\int x^2 - xdx, \qquad \int \frac{x^2-1}{x}dx, \qquad \int 3x - x^3dx, \qquad \int x^2 + 3e^{2x}dx.$$
$$\int e^{-x} + 1dx, \qquad \int \frac{1+x}{x^2}dx, \qquad \int 3\cos(x) + \sin(x)dx, \qquad \int (x+1)^3dx.$$

Esercizio 5.6 (⏭). Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \cos(x) - \sin(x)dx, \qquad \int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx, \qquad \int 2^x + 2^{-x}dx, \qquad \int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx.$$

Suggerimento: per l'ultimo integrale calcolare $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - 1$.

5. Integrali particolari

Se $f(x)$ è una funzione derivabile, dalla regola di derivazione della funzione composta seguono immediatamente le formule di integrazione

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2, \qquad \int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log(f(x)),$$
$$\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)), \qquad \int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x)).$$

Molti integrali si riescono a risolvere trasformandoli in una opportuna somma si integrali del tipo precedente. Ad esempio, per calcolare

$$\int \frac{x}{x^2+2}dx$$

osserviamo che la derivata del denominatore è il doppio del numeratore. Moltiplicando e dividendo per 2 si ha

$$\int \frac{x}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2)\ .$$

Con simili ragionamenti si ha:

$$\int \frac{2}{3x-4}dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x-4}dx = \frac{2}{3}\int \frac{(3x-4)'}{3x-4}dx = \frac{2}{3}\log(3x-4)\,;$$

$$\int \frac{x}{x-4}dx = \int \frac{x-4+4}{x-4}dx = \int 1+\frac{4}{x-4}dx = x+4\log(x-4)\,;$$

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)dx = \int (x^2+x+1)'(x^2+x+1)dx = \frac{(x^2+x+1)^2}{2}\,;$$

$$\int xe^{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)'e^{x^2-1}dx = \frac{1}{2}e^{x^2-1}\,;$$

$$\int x^2\sin(x^3)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sin(x^3)dx = \frac{1}{3}\int (x^3)'\sin(x^3)dx = \frac{-\cos(x^3)}{3}\,;$$

$$\int e^x\cos(e^x)dx = \int (e^x)'\cos(e^x)dx = \sin(e^x)\,;$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int \frac{\sin(x)'}{\sin(x)}dx = \log(\sin(x))\,.$$

Esercizi.

Esercizio 5.7. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{3x+2}{x+1}dx, \qquad \int \frac{x}{x+3}dx, \qquad \int \frac{x+2}{3x-1}dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x}dx,$$

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx, \qquad \int xe^{1-x^2}dx, \qquad \int \frac{1}{x\log(x)}dx, \qquad \int \frac{\log(x)}{x}dx,$$

$$\int 3x\sin(x^2+1)dx, \qquad \int \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}dx, \qquad \int \tan(x)dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx\,.$$

6. Integrazione per parti

Al fine di prevenire un errore comune, osserviamo che l'integrale del prodotto **non** è uguale al prodotto degli integrali.

Se $G(x) = \int g(x)dx$ è una primitiva di $g(x)$, allora dalla formula di derivazione del prodotto segue $(fG)'(x) = f(x)g(x) + f'(x)G(x)$, quindi $(fG)'(x) - f'(x)G(x) = f(x)g(x)$ ed integrando si ottiene l'uguaglianza

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x)dx - \int f'(x)G(x)dx.$$

Da tale uguaglianza segue la

Formula di integrazione per parti

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int f'(x)\left(\int g(x)dx\right)dx.$$

La formula di integrazione per parti ci dice il prezzo che dobbiamo pagare per far evadere $f(x)$ dall'integrale $\int f(x)g(x)dx$ e può essere utilizzata per il calcolo di alcuni integrali.

Esempio 6.1. Calcoliamo $\displaystyle\int xe^x dx$. Per la formula di integrazione per parti, ponendo $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$, si ha

$$\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int 1\left(\int e^x dx\right) dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x.$$

Notiamo in proposito che, se avessimo scelto $g(x) = x$ e $f(x) = e^x$, allora avremmo avuto l'uguaglianza

$$\int e^x x dx = e^x \int x dx - \int e^x\left(\int x dx\right) dx = e^x\frac{x^2}{2} - \int e^x\frac{x^2}{2}dx$$

che si sarebbe rivelata del tutto inutile.

Esempio 6.2. Calcoliamo $\displaystyle\int x^2e^x dx$. Per la formula di integrazione per parti, ponendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$, si ha

$$\int x^2e^x dx = x^2\int e^x dx - \int 2x\left(\int e^x dx\right) dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$$

Abbiamo calcolato precedentemente l'integrale di xe^x, e quindi

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x.$$

Esempio 6.3. Calcoliamo $\displaystyle\int \log(x)dx$. Per la formula di integrazione per parti, ponendo $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = 1$, si ha

$$\begin{aligned}\int \log(x)dx &= \log(x)\int dx - \int \frac{1}{x}\left(\int dx\right) dx\\ &= x\log(x) - \int \frac{1}{x}x dx = x(\log(x)-1).\end{aligned}$$

Esempio 6.4.

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)dx &= x\int \sin(x)dx - \int\left(\int \sin(x)dx\right) dx\\ &= -x\cos(x) - \int -\cos(x)dx = \sin(x) - x\cos(x).\end{aligned}$$

Esempio 6.5. Dall'integrazione per parti si ha la formula

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x)}{x}dx = \int \log(x)\frac{dx}{x} &= \log(x)\int\frac{dx}{x} - \int\frac{1}{x}\left(\int\frac{dx}{x}\right) dx\\ &= \log^2(x) - \int\frac{\log(x)}{x}dx.\end{aligned}$$

Sommando ad ambo i membri $\int(\log(x)/x)dx$ e dividendo per 2 si ricava

$$\int \frac{\log(x)}{x}dx = \frac{\log^2(x)}{2}\ .$$

Esempio 6.6. Calcoliamo l'integrale di $\sin(2x)\sin(x)$. Dalla formula di integrazione per parti si ricava

$$\int \sin(2x)\sin(x)dx =$$

$$= \sin(2x)\int \sin(x)dx - \int 2\cos(2x)\left(\int \sin(x)dx\right)dx$$

$$= -\sin(2x)\cos(x) + 2\int \cos(2x)\cos(x)dx.$$

Similmente

$$\int \cos(2x)\cos(x)dx =$$

$$= \cos(2x)\int \cos(x)dx - \int -2\sin(2x)\left(\int \cos(x)dx\right)dx$$

$$= \cos(2x)\sin(x) + 2\int \sin(2x)\sin(x)dx.$$

Se adesso nella prima equazione sostituiamo $\int \cos(2x)\cos(x)dx$ con il risultato trovato nella seconda equazione e semplifichiamo, si ottiene

$$\int \sin(2x)\sin(x)dx = \frac{\sin(2x)\cos(x) - 2\cos(2x)\sin(x)}{3}.$$

Esercizi.

Esercizio 5.8 (▶▶|). Utilizzando la formula di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali:

$$\int x^2 e^{-x}dx, \quad \int x\log(x)dx, \quad \int x^2\cos(x)dx, \quad \int x\sin(2x)dx.$$

Esercizio 5.9. Utilizzando la formula di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali:

$$\int \cos(x)\cos(3x)dx, \quad \int \sin(x)e^x dx, \quad \int x2^{-x}dx, \quad \int x\sin(x)\cos(x)dx,$$

$$\int xe^{5x}dx, \quad \int \log^2(x)dx, \quad \int \log^3(x)dx, \quad \int x^2\log(x)dx,$$

$$\int x^2\log(x)dx, \quad \int x^2\log^2(x)dx, \quad \int \frac{\log^2(x)}{x^2}dx, \quad \int e^x\cos(x)dx,$$

$$\int x\sqrt{x+1}dx, \quad \int x^2\sqrt{x+1}dx, \quad \int \log(x^2+1), \quad \int x\log(x^2+1).$$

7. Integrazione per sostituzione

Supponiamo di avere una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$. Se consideriamo il cambiamento di variabile $x = \phi(t)$, allora dalla regola di derivazione della funzione composta segue che

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = \frac{dF}{dx}(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

e quindi vale

$$F(x) = \int f(x)dx$$

se e solo se

$$F(\phi(t)) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Prima di applicare tale risultato al calcolo degli integrali è conveniente introdurre il concetto di *differenziale* di una funzione f.

Abbiamo già detto che il simbolo dx che delimita a destra l'integrale viene detto differenziale di x. Se $f(x)$ è una funzione derivabile, definiamo il *differenziale di f* come

$$df = \frac{df}{dx}(x)dx,$$

ossia come il prodotto della derivata di f rispetto a x per il differenziale dx. Notiamo che il differenziale di una funzione f è nullo se e solo se f è una funzione costante sugli intervalli.

Esempio 7.1. Si ha

$$d(x^2 - x) = \frac{d(x^2 - x)}{dx}dx = (2x - 1)dx, \qquad d\log(x) = \frac{1}{x}dx.$$

Il vantaggio del differenziale è che esso commuta con i cambiamaneti di parametro, nel senso che la trasformazione può essere fatta indifferentemente prima o dopo il calcolo del differenziale. Infatti se prima sostituiamo $\phi(t)$ ad x si ha

$$df = \frac{df(\phi(t))}{dt}dt = \frac{df}{dx}(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Se invece si calcola prima il differenziale e poi si sostituisce $\phi(t)$ al posto di x si ha

$$df = \frac{df}{dx}(x)dx = \frac{df}{dx}(\phi(t))d\phi(t) = \frac{df}{dx}(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Infine se si ha $f(x) = g(y)$, dove x e y sono due variabili legate da una relazione non meglio precisata, allora

$$\frac{df}{dx}dx = df = dg = \frac{dg}{dy}dy.$$

Esempio 7.2. Se $x^2 = y^3 + 1$, allora considerando il differenziale si ha $dx^2 = 2xdx$, $d(y^3 + 1) = 3y^2dy$ e quindi si ricava

$$dx = \frac{3y^2}{2x}dy = \frac{3y^2}{2\sqrt{y^3 + 1}}dy.$$

Se invece, partendo dalla relazione $x^2 = y^3 + 1$ avessimo subito scritto $x = \sqrt{y^3+1}$, allora avremmo ancora avuto

$$dx = \frac{d\sqrt{y^3+1}}{dy}dy = \frac{3y^2}{2\sqrt{y^3+1}}dy.$$

Consideriamo adesso il termine dx nel simbolo dell'integrale come il differenziale della funzione x. Allora se $x = \phi(t)$ si ha

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(\phi(t))\frac{d\phi}{dt}dt = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

e ritroviamo la precedente formula. Tale formula va intesa nel senso che se $F(x) = \int f(x)dx$ e $G(t) = \int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$, allora $G(t) = F(\phi(t))$.

Esempio 7.3. Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$. Possiamo introdurre la funzione $y = x^2$, allora $dy = 2xdx$, ossia $xdx = \dfrac{dy}{2}$ e si ha

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}xdx = \int e^y\frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2} = \frac{e^{x^2}}{2}.$$

Esempio 7.4. Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}dx$. Poniamo $y = x-2$, allora $x = y+2$ e $dx = dy$. Si ha

$$\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{y}dy = \log(y) = \log(x-2).$$

Esempio 7.5. Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}dx$. Poniamo $y = 3x+2$, allora $dy = d(3x+2) = 3dx$. Si ha

$$\int \frac{1}{3x+2}dx = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{3} = \frac{\log(y)}{3} = \frac{\log(3x+2)}{3}.$$

Allo stesso modo si dimostra che per ogni numero reale $a \neq 0$ si ha

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\log(ax+b)}{a}.$$

Esempio 7.6. Sia a un numero reale diverso da 0. Siccome vale

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}\left(\log(x-a) - \log(x+a)\right) = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right).\end{aligned}$$

Esempio 7.7. Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ con la sostituzione $y = x^2$. Allora $dy = 2xdx$ e

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{dy}{2(y+1)} = \frac{\log(2(y+1))}{2} = \frac{\log(2x^2+2)}{2}.$$

Esempio 7.8. Calcoliamo $\int \frac{dx}{e^x+1}$ con la sostituzione $y = e^x$. Allora $x = \log(y)$, $dx = dy/y$ e

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \log(y) - \log(y+1)$$
$$= \log(e^x) - \log(e^x+1) = x - \log(e^x+1).$$

Esempio 7.9. Calcoliamo $\int \frac{x^3}{x^8+1} dx$ con la sostituzione $y = x^4$. Allora $dy = 4x^3 dx$ e

$$\int \frac{x^3}{x^8+1} dx = \int \frac{dy}{4(y^2+1)} = \frac{1}{4}\arctan(y) = \frac{1}{4}\arctan(x^4).$$

Esercizi.

Esercizio 5.10. Utilizzando le sostituzioni suggerite, calcolare i seguenti integrali:

$$\int x^2\cos(x^3)dx, \quad t = x^3; \qquad \int \frac{x}{x^4+1}dx, \quad t = x^2;$$
$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx, \quad t = \arctan(x); \qquad \int x(3x^2+1)^7 dx, \quad t = 3x^2+1;$$
$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx, \quad x = t^2; \qquad \int e^x\sqrt{e^x+1}dx, \quad t = \sqrt{e^x+1};$$
$$\int \frac{1-e^{-x}}{1+e^x}dx, \quad t = e^{-x}; \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx, \quad t = \sqrt{1+e^x};$$
$$\int \frac{1}{\cos(x)}dx, \quad t = \sin(x);$$

Esercizio 5.11. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx, \qquad x > 1\ .$$

Suggerimento: considerare la sostituzione $x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ e mostrare che valgono le formule $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $t = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.

Esercizio 5.12. Calcolare gli integrali

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx, \qquad \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx, \qquad x > 1\ .$$

(moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}$ nel primo caso e per $\sqrt{x+1}$ nel secondo).

8. Integrazione di funzioni razionali

Vediamo adesso come si possono integrare alcune funzioni del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi.

Il caso più semplice è quando il denominatore ha grado 1; in questo caso si applica il metodo di sostituzione. Consideriamo ad esempio l'integrale

$$\int \frac{x^3}{x-1} dx.$$

Poniamo $y = x - 1$, dunque $x = y + 1$, $dx = dy$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{x^3}{x-1} dx = \int \frac{(y+1)^3}{y} dy = \int \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{y} dy = \int y^2 + 3y + 3 + \frac{1}{y} dy$$
$$= \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + 3y + \log(y) = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{3(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + \log(x-1).$$

Del tutto simile è il caso in cui il denominatore è la potenza di un polinomio di grado 1, come ad esempio

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)^2} dx.$$

Poniamo $y = x - 2$, dunque $x = y + 2$, $dx = dy$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{(y+2)^2 + 1}{y^2} dy = \int \frac{y^2 + 4y + 5}{y^2} dy = \int 1 + \frac{4}{y} + \frac{5}{y^2} dy$$
$$= y + 4\log(y) - \frac{5}{y} = x - 2 + 4\log(x-2) - \frac{5}{x-2}.$$

Leggermente più complicato è il caso in cui il denominatore è il prodotto di due polinomi distinti di grado 1, come ad esempio

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-1)} dx.$$

Per risolvere l'integrale bisogna utilizzare l'identità

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)},$$

dalla quale segue che per ogni coppia di numeri reali *distinti* a, b vale

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right).$$

Ponendo $a = 3$ e $b = 1$ nella formula precedente si ottiene

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{3-1}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right)$$

e di conseguenza

$$\int \frac{1}{(x-3)(x-1)} dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \frac{1}{2}(\log(x-3) - \log(x-1)).$$

Esempio 8.1.

$$\int \frac{2}{(x-2)(x+2)} dx = \int \frac{2}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2}(\log(x-2) - \log(x+2)).$$

Esempio 8.2.

$$\int \frac{3}{(x-1)(x+4)}dx = \int \frac{3}{5}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \frac{3}{5}(\log(x-1) - \log(x+4)).$$

Consideriamo adesso

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx.$$

Possiamo effettuare la sostituzione $y = x - 1$ e far diventare l'integrale

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{y+1}{y(y+3)}dy = \int \frac{y}{y(y+3)} + \frac{1}{y(y+3)}dy =$$

$$= \int \frac{1}{(y+3)}dy + \int \frac{1}{y(y+3)}dy.$$

I singoli addendi si calcolano con i metodi visti in precedenza e otteniamo

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx = \log(y+3) + \frac{1}{3}(\log(y) - \log(y+3)) = \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{2}{3}\log(x+2).$$

Esempio 8.3. Calcoliamo

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}dx$$

Con la sostituzione $y = x - 1$ si ha

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}dx = \int \frac{y^2+2y+1}{y(y+2)}dy = \int \frac{y^2+2y}{y(y+2)} + \frac{1}{y(y+2)}dy =$$

$$= \int 1 + \frac{1}{y(y+2)}dy = y + \frac{1}{2}(\log(y) - \log(y+2)) = x - 1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Per calcolare un integrale del tipo

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$$

è sufficiente considerare la sostituzione $x = ay$ e quindi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{a}{a^2y^2+a^2}dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{a}\arctan(y) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Infine studiamo gli integrali del tipo

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx$$

quando il discriminante del denominatore è negativo: $\Delta = b^2 - 4c < 0$. In tal caso, mediante la sostituzione canonica

$$x = \frac{y-b}{2}$$

si ha $dx = \dfrac{dy}{2}$,

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{4}{y^2-\Delta}dx$$

e ci riconduciamo al caso precedente.

Esercizi.

Esercizio 5.13. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2}{2x-3}dx, \qquad \int \frac{x}{4x-1}dx, \qquad \int \frac{x^2}{x+3}dx, \qquad \int \frac{x-3}{(x+1)^2}dx.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-3}dx, \qquad \int \frac{x}{(x-1)^2}dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx, \qquad \int \frac{x-1}{(x+1)^4}dx.$$

Esercizio 5.14. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+7)}dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x-1)(x+3)}dx, \qquad \int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)}dx,$$

$$\int \frac{x-12}{x^2+x-6}dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2-4}dx, \qquad \int \frac{3x-1}{x^2+2x}dx, \qquad \int \frac{3x^2-1}{x+1}dx,$$

$$\int \frac{x^4}{x+1}dx, \qquad \int \frac{2x-1}{x^2-x}dx, \qquad \int \frac{2}{x^2-5x-4}dx.$$

Esercizio 5.15. Utlizzando le sostituzioni suggerite tra parentesi, calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+2}dx \quad (y=e^x); \qquad \int \frac{2x(x^2+2)}{x^4-1}dx \quad (y=x^2);$$

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x+1}}dx \quad (y=\sqrt{x+1}); \qquad \int \frac{\log^2(x)+1}{x(\log^2(x)-1)}dx \quad (y=\log(x));$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+5e^x+6}dx \quad (y=e^x); \qquad \int \frac{2x}{x^4+7x^2+10}dx \quad (y=x^2).$$

Esercizio 5.16. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x\log(x^2-1)dx, \qquad \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx, \qquad \int x^3e^{-x}dx, \qquad \int \log^2(x)dx,$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx, \qquad \int \sqrt{x}\log(x)dx, \qquad \int \frac{x^2}{1-x^3}dx,$$

$$\int \tan(x)dx, \qquad \int \tan^2(x)dx, \qquad \int \tan^3(x)dx.$$

(Suggerimento: ricordare che $\tan^2(x)=\tan'(x)-1$.)

Esercizio 5.17. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$$

Suggerimento: determinare 4 numeri reali a,b,c,d tali che

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}.$$

Esercizio 5.18. Usando la sostituzione $x=(1-y^2)^{-1}$ calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx.$$

9. Esempi riassuntivi

Esempio 9.1. Calcolare $\int_0^\pi \sin^2(x)dx$.
Abbiamo visto che per il calcolo di un integrale definito occorre prima trovare una primitiva e poi calcolarne i valori sugli estremi di definizione, quindi

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \left[\int \sin^2(x)dx\right]_0^\pi.$$

Dalla formula di duplicazione del coseno $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ segue che

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \left[\int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx\right]_0^\pi = \left[\int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos(2x)}{2}dx\right]_0^\pi$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \left[\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\sin(2\pi)}{4} + \frac{\sin(0)}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Notiamo quindi che la media integrale di $\sin^2$ nell'intervallo $[0,\pi]$ è uguale ad $1/2$.

Se mettiamo insieme la formula di integrazione per parti con la formula per il calcolo degli integrali definiti troviamo

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[f(x)\int g(x)dx\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\left(\int g(x)dx\right)dx.$$

Esempio 9.2. Calcolare $\int_0^1 \log(1+x^2)dx$.
Per la formula di integrazione per parti

$$\int_0^1 \log(1+x^2)\cdot 1dx = \left[\log(1+x^2)\int 1dx\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\left(\int 1dx\right)dx$$
$$= \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \log(2) - \int_0^1 \frac{2+2x^2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}dx$$
$$= \log(2) - [2x]_0^1 + [2\arctan x]_0^1 = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 9.3. Calcolare $\int_0^1 \log(1+e^x)e^x dx$.
Calcoliamo prima l'integrale indefinito utilizzando la formula di integrazione per parti

$$\int \log(1+e^x)e^x dx = \log(1+e^x)\int e^x dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\left(\int e^x dx\right)dx$$
$$= \log(1+e^x)e^x - \int \frac{e^x}{1+e^x}e^x dx.$$

Calcoliamo adesso l'integrale a destra con la sostituzione $y = 1+e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}e^x dx = \int \frac{y-1}{y}dy = \int 1 - \frac{1}{y}dy = y - \log(y) = e^x + 1 - \log(e^x+1).$$

In conclusione

$$\int_0^1 \log(1+e^x)e^x dx = [\log(1+e^x)e^x - e^x - 1 + \log(e^x+1)\,]_0^1 = [(\log(1+e^x)-1)(e^x+1)\,]_0^1$$

A conclusione del capitolo, riassumiamo le regole elementari di integrazione:

$\int c dx = cx, \quad c$ costante	$\int x dx = \frac{x^2}{2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \log x \text{ per } x > 0 \\ \log(-x) \text{ per } x < 0 \end{cases}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$, per $a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}, \quad a > 0, a \neq 1.$	$\int \log x dx = x(\log x - 1)$

$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x$
$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}, \quad a \neq 0$	$\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a}, \quad a \neq 0$
$\int \tan x dx = -\log(\cos x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$
$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(\lvert f(x) \rvert)$

Esercizi.

Esercizio 5.19. Calcolare i seguenti integrali definiti.

$$\int_0^1 (1+2x)^2 dx, \quad \int_{-3}^5 3\sqrt{4+x} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{1}{2x+3} dx, \quad \int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2+e^x} dx, \quad \int_1^3 x\sqrt{2+x^2} dx, \quad \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx, \quad \int_0^1 2^x dx.$$

Esercizio 5.20 (☕). Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si definisce il suo *fattoriale* $n!$ come il prodotto di tutti i numeri interi compresi tra 1 ed n: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, …, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n$ eccetera. Indichiamo $b_0 = e - 1$ e per ogni $n > 0$

$$b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

Siccome $0 \leq e^{1-x} \leq e$ per ogni $x \geq 0$ si hanno le diseguaglianze

$$0 \leq b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e dx = \frac{1}{n!} \frac{e}{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}.$$

Utilizzare la formula di integrazione per parti per mostrare che $b_n = -1/n! + b_{n-1}$. Dunque

$$e = 1 + b_0 = 1 + \frac{1}{1!} + b_1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + b_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + b_3 = \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + b_n \quad \text{per ogni } n.$$

Siccome b_n diventa molto piccolo quando n cresce, questa relazione è molto utile per il calcolo dei valori approssimati del numero di Nepero.

Se fissiamo un numero reale t e ripetiamo il procedimento con i coefficienti

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_0^t x^n e^{t-x} dx,$$

che cosa si ottiene?

CAPITOLO 6

Equazioni differenziali

1. Equazioni funzionali e differenziali

In matematica hanno notevole importanza le cosiddette *equazioni funzionali*; sono equazioni nelle quali le possibili soluzioni non sono numeri ma funzioni. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.1. Vogliamo determinare, se esistono, delle funzioni continue il cui grafico è contenuto nella circonferenza C di raggio 1 e centro 0. Se indichiamo con t, y le coordinate del piano, allora il cerchio C è il luogo dei punti che soddisfano l'equazione

$$t^2 + y^2 = 1.$$

Ne segue che il grafico di una funzione $y(t)$ è contenuto in C se e solo se vale $t^2 + y^2(t) = 1$ per ogni t. Le soluzioni dell'equazione sono $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$ e $y(t) = -\sqrt{1 - t^2}$.

Esempio 1.2. Le funzioni $y(t) = t + 1$ e $y(t) = -1$ sono soluzioni dell'equazione funzionale

$$y^2 - ty = t + 1.$$

Come per le equazioni numeriche, se cerchiamo la soluzione di più equazioni contemporaneamente si ha un *sistema di equazioni funzionali.* Ad esempio, cercare le funzioni $y(t)$ tali che $y^2(t) = 1 - t^2$ per ogni t e tali che $y(0) = 1$, equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y^2 = 1 - t^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esempio 1.3. La funzione $y(t) = t + 1$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y^2 - ty = t + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esempio 1.4. La funzione costante $y(t) = -1$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y^2 - ty = t + 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Esempio 1.5. Il sistema

$$\begin{cases} y^2 - ty = t + 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

è impossibile, ossia non ammette alcuna soluzione. Infatti la prima equazione per $t = 0$ diventa $y^2(0) = 1$ che è incompatibile con la seconda equazione.

Le *equazioni differenziali del primo ordine* sono un tipo particolare di equazioni funzionali; sono infatti equazioni nelle quali si richiede che la derivata prima y' della soluzione $y = y(t)$ deve essere uguale ad una espressione $F(y, t)$ dipendente dalla variabile indipendente t e dai valori di y. Scriveremo in formule

$$y' = F(y, t).$$

Ad esempio l'equazione $y' = y$ è una equazione differenziale che ha come possibile soluzione la funzione $y(t) = e^t$. Infatti si ha $y'(t) = e^t$ e quindi vale $y' = y$. Notiamo che $y(t) = 2e^t$ è un'altra soluzione della stessa equazione differenziale $y' = y$. Vedremo più avanti che, di solito, un'equazione differenziale possiede infinite soluzioni.

Esempio 1.6. L'equazione $y' = \cos(t)$ è un'equazione differenziale e la funzione $y(t) = \sin(t)$ ne è una soluzione.

Notiamo che la primitiva di una funzione $f(t)$ è per definizione nient'altro che una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(t)$.

Esempio 1.7. L'equazione $y' = 2\sqrt{y}$ è un'equazione differenziale e la funzione $y(t) = t^2$ ne è una soluzione per $t > 0$. Infatti se $y = t^2$, allora $y' = 2t$ e quindi per $t > 0$ è verificata l'uguaglianza $y' = 2\sqrt{y}$.

Esempio 1.8. L'equazione

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$

è differenziale. La funzione $y(t) = t\log(t)$ ne è una soluzione per $t > 0$. Infatti vale

$$y' = \log(t) + 1 = \frac{t\log(t)}{t} + 1 = \frac{y}{t} + 1.$$

Esempio 1.9. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = 2y^2t$. Una possibile soluzione è $y(t) = 0$. Per trovare le eventuali soluzioni non nulle si può procedere nel modo seguente: si cerca di scrivere l'equazione nella forma $F(y)y' = G(t)$, ossia di portare y, y' al primo membro e x al secondo. Nel nostro caso

$$\frac{y'}{y^2} = 2t.$$

Siccome y'/y^2 è la derivata di $-1/y(t)$ rispetto a t ne segue che

$$t^2 + C = \int tdt = \int \frac{y'}{y^2}dt = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{-1}{y} \ .$$

da cui ricaviamo

$$y = \frac{-1}{t^2 + C}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dove C è una generica costante.

Esempio 1.10. L'equazione differenziale $y' = t^4(y - 1)$ possiede come soluzione la funzione costante $y(t) = 1$. Similmente l'equazione differenziale $y' = e^t y - 4e^t$ possiede come soluzione la funzione costante $y(t) = 4$.

Esercizi.

Esercizio 6.1 (⏭). Ogni funzione della colonna destra è soluzione di una ed una sola equazione della colonna sinistra. Sapete ricomporre i giusti accoppiamenti?

$$\begin{array}{rl}
2y\sqrt{1-y^2} = \sin(2t) & \qquad y(t) = t+1 \\
y(y-2) = t^2-1 & \qquad y(t) = -e^{2t} \\
y = t\sqrt{ty} & \qquad y(t) = \sin(t) \\
y^2 = e^{4t} & \qquad y(t) = t^3
\end{array}$$

Esercizio 6.2 (⏭). Dire quali delle seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y + e^t$:

$$y = e^t, \quad y = te^t, \quad y = (t+1)e^t, \quad y = 2te^t, \quad y = (t-4)e^t, \quad y = e^{2t} - 1.$$

Esercizio 6.3. Verificare che ciascuna delle seguenti funzioni è soluzione dell'equazione differenziale a fianco specificata:

$$\begin{array}{rcc}
y(t) = t + \log(t-1), & y' = te^{t-y}, & t > 1\,; \\
y(t) = \sqrt{t^2-3}, & y' = \dfrac{y^2+3}{ty}, & t > \sqrt{3}\,; \\
y(t) = \dfrac{1-t}{1+t}, & y' = \dfrac{y^2-1}{2t}, & t > 0\,;
\end{array}$$

Esercizio 6.4. Dopo aver letto l'Esempio 1.9 trovare soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

$$y' = y^2(t+1), \quad y' = \frac{y^2}{t^2}, \quad y' = y^2 e^t,$$
$$y' = e^y, \quad y' = te^{-y}, \quad y' = \frac{t^2}{y}\,.$$

Esercizio 6.5. Dopo aver letto l'Esempio 1.10 trovare le soluzioni costanti delle seguenti equazioni differenziali.

$$y' = t^2(y+1), \quad y' = \frac{y^2}{t^2 + \sin(t)}, \quad y' = y^2e^t - e^t,$$
$$y' = e^y - 1, \quad y' = ye^{-t} + 4e^{-t}, \quad y' = \frac{y^2-4}{t^2+4}\,.$$

Esercizio 6.6. Solo una delle seguenti equazioni differenziali ammette come soluzione una funzione costante $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Indicare quale: $y' = y - t$, $y' = ty - 1$, $y' = y + \cos(t)$, $y' = 2y$, $y' = y + e^t$.

Esercizio 6.7 (☕). Dire, motivando la risposta, se è possibile oppure impossibile che esista una soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale $y' = ty^2 - 1$ tale che $y(0) = 1$ e $y(1) = 0$?

2. Equazioni differenziali lineari

Le *equazioni differenziali lineari* del primo ordine sono per definizione quelle che si possono scrivere nella forma

$$y' = g(t)y + h(t),$$

con $g(t)$ e $h(t)$ funzioni continue. Chiameremo *insieme di definizione* dell'equazione differenziale $y' = g(t)y + h(t)$ l'insieme dei punti $t \in \mathbb{R}$ dove le funzioni $g(t)$ e $h(t)$ sono entrambe definite.

Ad esempio, l'equazione differenziale $y' = y + \log(t)$ è lineare con insieme di definizione $\{t > 0\}$. Più precisamente l'equazione $y' = y + \log(t)$ è ottenuta dall'espressione generale $y' = g(t)y + h(t)$ considerando $g(t) = 1$ e $h(t) = \log(t)$.

Esempio 2.1. L'equazione differenziale $y' = e^t + ty$ è lineare con insieme di definizione $\mathbb{R}$. Più precisamente l'equazione $y' = e^t + ty$ è ottenuta dall'espressione generale $y' = g(t)y + h(t)$ considerando $g(t) = t$ e $h(t) = e^t$.

Esempio 2.2. L'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{t} - 1$ è lineare con insieme di definizione $\{t \neq 0\}$. Più precisamente l'equazione $y' = \dfrac{y}{t} - 1$ è ottenuta dall'espressione generale $y' = g(t)y + h(t)$ considerando $g(t) = 1/t$ e $h(t) = -1$.

Esempio 2.3. Le equazioni differenziali

$$y' = \frac{t}{y} - 1, \quad y' = ty^2 - t, \quad y' = \log(y), \quad y' = y + e^y, \quad y' = \frac{y}{y^2+1},$$

non sono lineari: per ciascuna di loro non è possibile trovare due funzioni $g(t), h(t)$ tali che l'equazione abbia la forma $y' = g(t)y + h(t)$.

Gli esempi più semplici di equazioni differenziali lineari sono quelli derivanti dal calcolo delle primitive, ossia le equazioni $y' = h(t)$. Esse sono ottenute dalla formula generale ponendo $g(t) = 0$. Pertanto se $H(t)$ è una primitiva di $h(t)$ allora le soluzioni di $y' = h(t)$ sono tutte e sole le funzioni del tipo $H(t) + c$, dove c è una costante.

Esempio 2.4. Consideriamo il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} y' = \cos(t), \\ y(0) = 18. \end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione $y' = \cos(t)$ sono le primitive del coseno, ovvero $y(t) = \sin(t) + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$y(0) = \sin(0) + c = 0 + c = 18$$

da cui si ricava $c = 18$. In conclusione la soluzione del sistema è la funzione $y(t) = \sin(t) + 18$.

Definizione 2.5. Un'equazione differenziale del primo ordine lineare si dice *omogenea* se è della forma $y' = g(t)y$, ossia se è ottenuta dalla formula generale $y' = g(t)y + h(t)$ ponendo $h = 0$.

Ad esempio, le equazioni $y' = y$, $y' = ty$ e $y' = ye^t$ sono omogenee, mentre le equazioni $y' = t + y$ e $y' = y + e^t$ non sono omogenee.
È possibile ricondurre la soluzione di una equazione omogenea al calcolo di una primitiva; ciò viene fatto usando il seguente teorema.

Teorema 2.6. *Sia $G(t)$ una primitiva della funzione $g(t)$. Allora le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$y' = g(t)y$$

sono tutte e sole le funzioni $y(t) = Ce^{G(t)}$, con C costante reale.

Dimostrazione. Se C è una costante e $y(t) = Ce^{G(t)}$, allora vale

$$y'(t) = CG(t)'e^{G(t)} = Cg(t)e^{G(t)} = g(t)y(t)$$

e quindi le funzioni $y(t) = Ce^{G(t)}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale.
Per dimostrare che non ce ne sono altre, utilizziamo il seguente stratagemma: supponiamo che $y(t)$ sia una soluzione e consideriamo la funzione $z(t) = y(t)e^{-G(t)}$. Vale allora $y(t) = z(t)e^{G(t)}$ e

$$z'(t) = y'(t)e^{-G(t)} - y(t)g(t)e^{-G(t)} = y(t)g(t)e^{-G(t)} - y(t)g(t)e^{-G(t)} = 0.$$

Dunque $z(t) = C$ è una costante e di conseguenza $y(t) = Ce^{G(t)}$. □

Esempio 2.7. L'equazione $y' = y$ si può scrivere come $y' = g(t)y$, dove $g(t) = 1$. Siccome $G(t) = t$ è una primitiva di $g(t) = 1$, ne segue che le funzioni $y(t) = Ce^t$ sono tutte e sole le soluzioni di $y' = y$.

Esempio 2.8. Sia $a \in \mathbb{R}$. L'equazione $y' = ay$ si può scrivere come $y' = g(t)y$, dove $g(t) = a$. Siccome at è una primitiva di a, ne segue che le funzioni $y(t) = Ce^{at}$ sono tutte e sole le soluzioni di $y' = ay$.
L'equazione differenziale $y' = ay$ è fondamentale in fisica, economia, biologia ed più in generale in tutte le scienze. Le ragioni di tale importanza saranno brevemente analizzate nella Sezione 4.

Esempio 2.9. L'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{t}$ si può scrivere come $y' = g(t)y$, dove $g(t) = 1/t$. Siccome $\log(t)$ è una primitiva di $1/t$, ne segue che le funzioni $y(t) = Ce^{\log(t)} = Ct$ sono, al variare di $C \in \mathbb{R}$, tutte e sole le soluzioni di $y' = y/t$.

Riepilogando, data un'equazione differenziale lineare $y' = g(t)y + h(t)$, se $g(t) = 0$ oppure $h(t) = 0$ per ogni t, allora il calcolo delle soluzioni si riconduce al calcolo di una primitiva.
In generale, se le funzioni $g(t)$ e $h(t)$ sono entrambe non nulle, allora il calcolo delle soluzioni si riconduce al calcolo di due primitive, come espresso nel seguente teorema.

Teorema 2.10. *Sia data l'equazione differenziale lineare $y' = g(t)y + h(t)$. Siano $G(t)$ una primitiva della funzione $g(t)$ e $H(t)$ una primitiva della funzione $h(t)e^{-G(t)}$, ossia*

$$G(t) = \int g(t)dt, \qquad H(t) = \int h(t)e^{-G(t)}dt.$$

Allora le soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$y' = g(t)y + h(t)$$

sono tutte e sole le funzioni $y(t) = (H(t) + C)e^{G(t)}$, con C costante reale.

Dimostrazione. Denotiamo $z(t) = y(t)e^{-G(t)}$. Siccome $z'(t) = y'(t)e^{-G(t)} - g(t)y(t)e^{-G(t)}$, la funzione $y(t)$ è una soluzione dell'equazione $y' = g(t)y + h(t)$ se e solo se vale

$$z'(t) = y'(t)e^{-G(t)} - g(t)y(t)e^{-G(t)} = h(t)e^{-G(t)}$$

e quindi se e solo se $z(t) = H(t) + C$ per qualche costante C. □

Esempio 2.11. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = ty - t$. Si tratta di un'equazione lineare $y' = g(t)y + h(t)$ con $g(t) = t$ e $h(t) = -t$.
Per risolverla dobbiamo prima calcolare una primitiva $G(t)$ di $g(t)$

$$G(t) = \int g(t)dt = \int tdt = \frac{t^2}{2}.$$

In seconda battuta dobbiamo calcolare una primitiva $H(t)$ di $h(t)e^{-G(t)}$

$$H(t) = \int -te^{-t^2/2}dt = e^{-t^2/2}.$$

Dalla formula generale segue che le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = ty - t$ sono

$$y(t) = (H(t) + C)e^{G(t)} = (e^{-t^2/2} + C)e^{t^2/2} = 1 + Ce^{t^2/2}.$$

Esempio 2.12. Consideriamo l'equazione $y' = \sin(t)y - \sin(t)$. Si applica il procedimento di risoluzione

$$G(t) = \int \sin(t)dt = -\cos(t), \qquad H(t) = \int -\sin(t)e^{\cos(t)}dt = e^{\cos(t)},$$

$$y(t) = (e^{\cos(t)} + C)e^{-\cos(t)} = 1 + Ce^{-\cos(t)}.$$

Esempio 2.13. Risolviamo l'equazione differenziale $y' = 1 - 2\tan(t)y$; applicando la regola generale si ha:

$$G(t) = \int -2\tan(t)dt = 2\int \frac{-\sin t}{\cos t}dt = 2\log(\cos t),$$

$$H(t) = \int 1 \cdot e^{-2\log(\cos t)}dt = \int \frac{dt}{e^{\log(\cos^2 t)}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è pertanto

$$\begin{aligned} y(t) = (H(t) + C)e^G(t) &= (\tan t + C)e^{2\log(\cos t)} \\ &= (\tan t + C)\cos^2 t = (\sin t + C\cos t)\cos t. \end{aligned}$$

Esempio 2.14. Risolviamo l'equazione differenziale $y' + \dfrac{y}{t} = t^3$ per i valori positivi di t. In tal caso abbiamo

$$G(t) = -\int \frac{1}{t}dt = -\log(t)$$

e quindi la soluzione generale è

$$y(t) = e^{G(t)}\left(C + \int t^3 e^{-G(t)}dt\right) = \frac{1}{t}\left(C + \int t^4 dt\right) = \frac{t^4}{5} + \frac{C}{t}\,.$$

Osservazione 2.15. Supponiamo di conoscere, per un qualsiasi motivo, una soluzione particolare $f(t)$ dell'equazione differenziale $y' = g(t)y + h(t)$. Possiamo allora sfruttare a nostro vantaggio questa informazione e semplificare il procedimento per il calcolo delle altre soluzioni. Infatti, abbiamo dimostrato precedentemente che $f(t)e^{-G(t)}$ è una primitiva di $h(t)e^{-G(t)}$, e dalla formula risolutiva segue che la soluzione generale è

$$y(t) = (f(t)e^{-G(t)} + C)e^{G(t)} = f(t) + Ce^{G(t)}.$$

Esempio 2.16. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = 6t^5y - 6t^5$. Si osserva che la funzione costante $y = 1$ è una soluzione particolare e quindi la soluzione generale è

$$y(t) = 1 + Ce^{G(t)} = 1 + Ce^{t^6}.$$

Esercizi.

Esercizio 6.8 (▶▶|). Tra le seguenti equazioni differenziali, dire quali sono lineari e quali non lo sono.

$$y' = 1 - y, \qquad y' = y^2, \qquad y' = e^t y, \qquad y' = e^y t, \qquad y' = y + \log(y),$$
$$y' = y + t\cos(y), \qquad y' = \log(t + y), \qquad y' = t^2 + ty + e^t, \qquad y' = e^{t\log(y)}.$$

Esercizio 6.9. Solo una delle seguenti equazioni differenziali *non è lineare*. Indicare quale: $y' = yt^2$, $y' = y - t^2$, $y' = ye^t$, $y' = \sqrt{y} + t$, $y' = \sin(t)y$.

Esercizio 6.10. Solo una delle seguenti equazioni differenziali *è lineare*. Indicare quale: $y' = ty^2$, $y' = y - t^{\sqrt{2}}$, $y' = ye^{y+t}$, $y' = \sqrt{y} - t^4$, $y' = \sin(t)\cos(y)$.

Esercizio 6.11 (▶▶|). Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali omogenee:

$$a) \quad y' = t^2 y; \qquad b) \quad y' = \log(t)y; \qquad c) \quad y' = \frac{y}{t+1}; \qquad d) \quad y' = \tan(t)y.$$

Esercizio 6.12 (▶▶|). Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$a)\ y' = \frac{y}{t} + t + \frac{1}{t}, \qquad b)\ y' = \frac{y}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad c)\ y' = \frac{y}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} + 1,$$
$$d)\ y' = \frac{-2t}{t^2+1}y + \frac{1}{t(t^2+1)}, \qquad e)\ y' = \tan(t)y + \frac{t}{\cos(t)}.$$

Esercizio 6.13 (▶▶|). Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$a)\ y' + y\tan(t) = \sin(2t), \quad b)\ y' + y\cos(t) = \sin(t)\cos(t), \quad c)\ y' = \frac{2y}{t+1} + (t+1)^3.$$

Esercizio 6.14. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$a)\ y' = 2y + 1, \qquad b)\ y' = 2y + t^2 + t, \qquad c)\ y' = e^t - y, \qquad d)\ y' = t - 2ty,$$
$$e)\ y' = 3e^t - e^t y, \qquad f)\ ty' + y = 3t^2 - 1, \quad (t > 0), \qquad g)\ y' + 2ty = 2t^2,$$
$$h)\ y' + y\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t), \qquad i)\ y' = \frac{ty}{1-t^2} + t, \quad (|t| < 1), \qquad j)\ y' + y\tan(t) = t^3,$$
$$k)\ y' = \tan(t)y + \frac{1}{\sin(t)}, \qquad l)\ y' = \frac{y - \log(t)}{t}, \quad (t > 0), \qquad m)\ y' = \frac{ty}{1+t^2}.$$

3. Il problema di Cauchy

Il problema di Cauchy[1] è un sistema di due equazioni funzionali: la prima equazione è differenziale, mentre la seconda, detta *condizione iniziale*, fissa il valore della soluzione in un punto dell'insieme di definizione.

Nel caso di equazioni differenziali lineari, la forma generale del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y' = g(t)y + h(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove t_0 è un punto nel quale entrambe le funzioni $g(t)$ e $h(t)$ sono definite e continue e dove y_0 è un qualsiasi numero reale.
Per risolvere il problema di Cauchy si calcolano prima tutte le soluzioni dell'equazione differenziale e poi si determinano tra esse quali soddisfano la condizione iniziale.

Consideriamo ad esempio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando i metodi di calcolo delle equazioni differenziali lineari troviamo che la soluzione generale di $y' = y - 1$ è $y(t) = 1 + Ce^t$, con $C \in \mathbb{R}$. Affinché la condizione iniziale sia soddisfatta deve valere

$$y(0) = 1 + Ce^0 = 1 + C = 0.$$

Da tale equazione si ricava $C = -1$ che, sostituito nella soluzione generale, ci dà $y(t) = 1 - e^t$.

Esempio 3.1. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo prima la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$G(t) = \int \frac{1}{t} dt = \log(t), \qquad H(t) = \int te^{-\log(t)} dt = \int \frac{t}{e^{\log(t)}} dt = \int dt = t,$$

$$y(t) = (t + C)e^{\log(t)} = (t + C)t = t^2 + Ct.$$

Adesso ricaviamo il valore della costante C dalla condizione iniziale

$$y(1) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

e di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è $y(t) = t^2 - t$.

Dalla discussione e dagli esempi che abbiamo fatto, emerge quanto segue:

Il problema di Cauchy formato da un'equazione differenziale lineare ed una condizione iniziale ammette una unica soluzione.

---

[1] Dal nome del matematico francese A.-L. Cauchy (si legge *coscì*).

Esempio 3.2. Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non è un problema di Cauchy perché il punto 0 non appartiene all'insieme di definizione dell'equazione differenziale. Notiamo che nessuna soluzione dell'equazione differenziale $y' = y/t + t$ soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esempio 3.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(t)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è $y(t) = Ce^{-\cos(t)}$ e quindi la condizione iniziale diventa $y(0) = Ce^{-\cos(0)} = Ce^{-1} = 1$; si ricava $C = e$ e quindi la soluzione del problema è $y(t) = ee^{-\cos(t)} = e^{1-\cos(t)}$.

Esercizi.

Esercizio 6.15 (⏭). Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$a)\ \begin{cases} y' = \sin(t), \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} y' = t^2 - 1, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} y' = \log(t), \\ y(1) = 0. \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} y' = te^{t^2}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6.16 (⏭). Calcolare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$a)\ \begin{cases} y' = 2y + t \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+t} - t^2 - t \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} y' = \log(t^2)y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6.17. Calcolare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy.

$$d)\ \begin{cases} y' = 3t^2y - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} y' = \dfrac{-2y}{t+1} + \dfrac{1}{t+2} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} y' = \cos(t)y \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} + \log(t) \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} - 1 \\ y(1) = 4 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} y' = y + \sin(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} y' = ty + t \\ y(1) = -1 \end{cases} \qquad k)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+1} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad l)\ \begin{cases} y' = t^3y + t^3 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

$$m)\ \begin{cases} y' = 2y + e^t \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad n)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y+1}{t+1} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad o)\ \begin{cases} y' = \dfrac{-2y}{t} + \dfrac{1}{t^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$p)\ \begin{cases} y' = \dfrac{e^t}{t} - \dfrac{y}{t} \\ y(2) = 2 \end{cases} \qquad q)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{t(t+1)} \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad r)\ \begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} - \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(1) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$s)\ \begin{cases} y' = t^3 - ty \\ y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \qquad t)\ \begin{cases} y' = \dfrac{t(y+1)}{t^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad u)\ \begin{cases} y' = t^9e^t(y-1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. A cosa serve l'equazione $y' = ay$?

Supponiamo di avere una grandezza fisica la cui quantità varia in funzione del tempo t secondo una funzione $y(t)$. In molti casi accade che, fissato un intervallo di tempo h, la variazione $y(t+h) - y(t)$ è direttamente propozionale a $y(t)$ con una costante di proporzionalità che dipende solo da h:

$$y(t+h) - y(t) = A(h)y(t)$$

dove $A(h)$ è una costante di proporzionalità che dipende solo da h. Vediamo qualche esempio concreto di tale situazione.

Esempio 4.1. Vi trovare in una stanza chiusa e buia assieme ad uno sciame di affamatissime zanzare. L'unica cosa che potete fare è battere le mani alla cieca sperando di uccidere il maggior numero possibile di insetti. È ragionevole supporre che il numero di zanzare che riuscite a spiaccicare in un intervallo di tempo h è direttamente proporzionale alla densità di zanzare presenti nella stanza. Se $y(t)$ indica il numero di zanzare presenti al tempo t, si avrà

$$y(t+h) - y(t) = A(h)y(t),$$

dove $A(h)$ è una quantità che dipende da h e dalla vostra abilità venatoria. È chiaro che $A(0) = 0$ e che $\lim_{h\to+\infty} A(h) = -1$. Il valore h tale che $A(h) = -1/2$ viene detto *tempo di dimezzamento* (delle zanzare).

Esempio 4.2. Indichiamo con t il tempo in anni e con $y(t)$ la quantità di isotopi di Carbonio 14 contenuti in un reperto. È noto che la quantità di isotopi che decadono in un intervallo di tempo fissato è direttamente proporzionale a $y(t)$. Vale quindi la regola

$$y(t+h) - y(t) = A(h)y(t).$$

Chiaramente si ha $A(0) = 0$ e $-1 < A(h) < 0$ per ogni $h > 0$. Calcoli teorici e misure sperimentali dicono che il tempo di dimezzamento del C14 è uguale a 5730 anni e quindi $A(5730) = -1/2$.

Supponiamo quindi di avere una grandezza fisica $y(t)$ che si comporta secondo la legge $y(t+h)-y(t) = A(h)y(t)$. Per trattare matematicamente il problema facciamo l'ipotesi che la funzione $y(t)$ sia derivabile; allora ad ogni istante t vale

$$y'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A(h)}{h} y(t) = ay(t)$$

dove a è il limite per $h \to 0$ del rapporto $A(h)/h$. Abbiamo quindi provato che la funzione $y(t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = ay$ e quindi vale $y(t) = Ce^{at}$. Di conseguenza si ha

$$A(h) = \frac{Ce^{a(t+h)} - Ce^{at}}{Ce^{at}} = e^{ah} - 1.$$

Se $a < 0$, allora il tempo di dimezzamento si ottiene risolvendo l'equazione $-1/2 = e^{ah} - 1$ che ci dà $h = \dfrac{\log(2)}{|a|}$. Se $a > 0$, allora il tempo di duplicazione si ottiene risolvendo l'equazione $1 = e^{ah} - 1$ che ci dà $h = \dfrac{\log(2)}{|a|}$.

Esempio 4.3. Vi siete appena brillatemente laureati e volete diventare ricchi investendo il vostro capitale iniziale C. Indichiamo con t il tempo in giorni e con $y(t)$ la quantità di denaro che avete al tempo t. I soldi che avrete guadagnato al tempo $t+h$ saranno direttamente proporzionali a $y(t)$, diciamo

$$y(t+h) - y(t) = A(h)y(t)$$

e quindi, per le considerazioni fatte precedentemente si ha $y(t) = y(0)e^{at}$, dove $a = \lim_{h\to 0} A(h)/h$. La costante a è tanto maggiore quanto voi siete bravi e, se $a > 0$ diventerete ricchi. Troppo facile: dove sta la fregatura?

Nella realta, anche se $a > 0$, voi dovete spendere ogni giorno una certa somma di denaro b per vitto, alloggio, trasporti ecc. per cui la vera relazione matematica diventa

$$y(t+h) - y(t) = A(h)y(t) - bh.$$

Dividendo per h e passando al limite per $h \to 0$ troviamo il problema di Cauchy

$$y'(t) = ay(t) - b, \qquad y(0) = C$$

che ha come soluzione

$$y(t) = \frac{b}{a} + \left(C - \frac{b}{a}\right) e^{at}.$$

Quindi se volete diventare ricchi il vostro capitale iniziale deve essere superiore a b/a; questa è la dimostrazione matematica del ben noto fatto che *tutti possono arricchirsi, tranne i poveri.*

Esercizi.

Esercizio 6.18 (▶▶|). Determinare, con l'aiuto di una calcolatrice, il numero di anni necessari affinché la quantità di Carbonio 14 contenuta in un reperto diventi 1/3 della quantità iniziale.

CAPITOLO 7

Soluzioni di alcuni esercizi

I numeri in grassetto indicano l'esercizio al quale la soluzione si riferisce.

1.1. Possiamo semplificare l'intersezione scrivendo

$$[1,10] \cap]4,12] =]4,10].$$

Gli intervalli $]-2,-1[$ e $[0,5]$ sono separati e non è possibile semplificare la scrittura della loro unione. Similmente non possiamo semplificare $[1,2] \cup]3,4[$.

1.15. Siccome

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x^2+x},$$

condizione necessaria e sufficiente affinché

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

è che $a+b=0$, $a=1$. Quindi $a=1$, $b=-1$.

1.22.

$$a)\ \text{nessuna soluzione}, \qquad b)\ \{x \le 0\}, \qquad c)\ \{x=-1\}.$$

1.24.

$$a)\ x=5,-3, \qquad b)\ x=2, \qquad c)\ x=7,\frac{13}{3}.$$

1.28.

$$a)\ x=-2 \qquad b)\ \text{nessuna soluzione} \qquad c)\ x=2.$$

2.9.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 28 & -18\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 8 & 4\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 28 & -18\\ -1 & 15\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \text{indefinito}, \qquad \begin{pmatrix}0 & 6 & 0\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 2\\ 8 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -18 & 12\\ 10 & 11 & -11\\ 33 & 17 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ 10 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 40 & -10\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\\ -7 & -7\end{pmatrix}.$$

2.10.

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -14, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, \qquad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 88, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192.$$

2.13.

	determinante	impossibile	infinite soluzioni
a)	$8-2k$	nessuno	$k=4$
b)	k^2-k-2	$k=2$	$k=-1$
c)	0	nessuno	$k\in\mathbb{R}$
d)	$2(k-1)$	$k=1$	nessuno

3.3.

(1) $f(g(x)) = \sqrt{x^2-3x}, \quad g(f(x)) = |x| - 3\sqrt{x}.$

(2) $f(g(x)) = \dfrac{1}{2x-2}, \quad g(f(x)) = \dfrac{2x-3}{2x-4}.$

(3) $f(g(x)) = \dfrac{2x-2}{2x-4}, \quad g(f(x)) = \dfrac{5-x}{x-1}.$

3.6. La funzione $\sin(x)$ non ha limite perché oscilla attorno all'asse delle ascisse senza però appiattirsi su esso, ossia è limitata ma non possiede asintoti orizzontali. L'insieme di definizione delle funzioni $\sqrt{1-x}, \log(1+\cos(x)), \dfrac{1}{\cos(\log(x))}$ non contiene alcun intervallo del tipo $]J,+\infty[$ e per loro non ha senso parlare di limite per x che tende a $+\infty$.

Infine si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{\log(x)} = 0$. Infatti per ogni $\epsilon > 0$ fissato basta considerare $K = e^{\frac{1}{\epsilon}}$ e osservare che per ogni $x > K$ vale

$$-1 \le \sin(x) \le 1, \qquad -\epsilon < \frac{\sin(x)}{\log(x)} < \epsilon\,.$$

3.7.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3x^2}{8x^3+x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+x^5}{3x^5-x^2} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^5}{x^4-x^6} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^2}{8x^3+x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+x^5}{3x^5-x^2} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-x^5}{x^4-x^6} = 0.$$

3.12.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

3.13. Nel primo limite, con la sostituzione $y = \pi x$ troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\pi x}-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y/\pi} = \pi \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = \pi\,.$$

Si noti che abbiamo appena dimostrato un caso particolare della formula generale

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a, \qquad a\in\mathbb{R}\,.$$

Nel secondo limite, siccome $2 = e^{\log(2)}$, si ha $2^x = (e^{\log(2)})^x = e^{x\log(2)}$ e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log(2)}-1}{x} = \log(2)\,.$$

Nel terzo limite, se $a = 0$ allora $\sin(ax) = 0$ per ogni x e quindi anche il limite è uguale a 0. Se $a \neq 0$ con il cambio di variabile $y = ax$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y/a} = a\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = a\,.$$

4.1.

$$(6x^3+2x^2-2x+1)' = 18x^2+4x-2, \qquad (8x^7-4x^2)' = 56x^6-8x,$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2},$$

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\sqrt{2-3x})' = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}, \qquad (3^x)' = \log 3\cdot 3^x, \qquad (x^x)' = (\log x+1)x^x,$$

$$(\log\cos x)' = -\tan x, \qquad \arctan{(5-3x^2)}' = \frac{-6x}{1+(5-3x^2)^2}.$$

4.4. **NON** soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,1]$ le funzioni x^3+x^2+4, $x^2-|x|$, $x^2+\frac{1}{x^2}$ e $\tan(\pi x)$.

5.4.

$$e^{-1} < A = \int_0^1 e^{-x^2}dx < 1.$$

5.6.

$$\int\cos(x)-\sin(x)dx = \sin(x)+\cos(x), \qquad \int\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x},$$

$$\int 2^x+2^{-x}dx = \frac{1}{\log(2)}(2^x-2^{-x}), \qquad \int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx = x-2\arctan(x).$$

5.8.

$$\int x^2e^{-x}dx = (x^2+2x+2)e^{-x}, \qquad \int x\log(x)dx = \frac{x^2}{4}(2\log x-1),$$

$$\int x^2\cos(x)dx = (x^2-2)\sin x+2x\cos x, \qquad \int x\sin(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x)-\frac{\sin(2x)}{4}.$$

6.1. I giusti accoppiamenti sono

$$\begin{aligned} 2y\sqrt{1-y^2} = \sin(2t) &\quad\to\quad y(t) = \sin(t) \\ y(y-2) = t^2-1 &\quad\to\quad y(t) = t+1 \\ y = t\sqrt{ty} &\quad\to\quad y(t) = t^3 \\ y^2 = e^{4t} &\quad\to\quad y(t) = -e^{2t} \end{aligned}$$

6.2. Sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y + e^t$ le funzioni $y = te^t$, $y = (t+1)e^t$ e $y = (t-4)e^t$.

6.8. Sono lineari le equazioni differenziali $y' = 1 - y$, $y' = e^t y$, $y' = t^2 + ty + e^t$. Non sono lineari le equazioni differenziali $y' = y^2$, $y' = e^y t$, $y' = y + \log(y)$, $y' = y + t\cos(y)$, $y' = \log(t+y)$, $y' = e^{t\log(y)}$.

6.11.

$$a)\ y = Ce^{t^3/3} \qquad b)\ y = C\left(\frac{t}{e}\right)^t \qquad c)\ y = C(t+1) \qquad d)\ y = \frac{C}{\cos(t)}.$$

6.12.

$$a)\ y(t) = t^2 - 1 + Ct, \qquad b)\ y(t) = Ce^{2\sqrt{t}} - 1, \qquad c)\ y(t) = t + Ce^{2\sqrt{t}},$$

$$d)\ y = \frac{\log(t) + C}{t^2 + 1}, \qquad e)\ y(t) = \frac{t^2 + C}{2\cos(t)}.$$

6.13.

$$a)\ y = \cos(t)(C - 2\cos(t)), \quad b)\ y = \sin(t) - 1 + \frac{C}{e^{\sin(t)}}, \quad c)\ y = \frac{(t+1)^4}{2} + C(t+1)^2\ .$$

6.15.

$$a)\ y = 1 - \cos(t), \quad b)\ y = \frac{t^3}{3} - t + 1, \quad c)\ y = t\log(t) - t + 1, \quad d)\ y = \frac{e^{t^2} + 3}{2}.$$

6.16.

$$a)\ y(t) = \frac{9}{4}e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \quad b)\ y(t) = \frac{-1}{2}(1+t)(2+t^2), \quad c)\ y(t) = t^{2t}e^{2-2t}.$$

6.18. Dopo circa 9082 anni.