

Un po' di storia.

Negli anni sessanta D.G. Quillen introduce il concetto di categoria modello. Si tratta sostanzialmente di una categoria M con tre classi di morfismi ($M, W, \text{Cof}, \text{Fib}$) che soddisfanno determinati assiomi.

In presenza di strutture modello si riesce a "fare dell'omotopia" sulla categoria M . La potenza degli assiomi di Quillen viene messa in luce dai lavori di D.M. Kan e dei suoi studenti: W.G. Dwyer, P.S. Hirschhorn, J. Smith.

Nel 1974 K.S. Brown nel suo lavoro "Abstract homotopy theory and generalised sheaf cohomology" introduce la nozione di "categoria a oggetti fibranti" $(\mathcal{C}, W, \text{Fib})$, essenzialmente rimuovendo dalla struttura modello tutti gli assiomi riguardanti la classe Cof . Pochi anni più tardi D.W. Anderson riprende e sviluppa il lavoro di Brown nel suo "Fibrations and Geometric realizations". Forse per il titolo "troppo poco astratto" e per il suo quasi immediato ritiro dalla Matematica il suo lavoro non ottiene molto successo e solo dopo venticinque anni (nel 2002) D.C. Cisinski riprenderà i suoi assiomi, completando le dimostrazioni omesse da Anderson e mostrando che per le usuali costruzioni omotopiche questo sembra essere il "setting più naturale".

Anche Cisinski non porta a termine il suo progetto, ma decide di condividere i suoi risultati con A. Radulescu-Banu che nel 2009 completa il suo lavoro "Cofibrations in homotopy theory", dove ricostruisce sviluppa e confronta fra loro i

vari approcci assiomatici citati.

L'idea dell'incontro di oggi è quella di ripercorrere la prima parte del lavoro di Radulescu-Banu, introducendo le cosiddette categorie Anderson-Brown-Cisinski cofibranti (o semplicemente ABC cofibranti) e studiandone le prime proprietà.

Gli assiomi.

Def: Una categoria ABC-cofibrante (M, W, Cof) è il dato di una categoria M e due classi di morfismi W (= equivalenze deboli) e Cof (= cofibrazioni) che soddisfano i seguenti assiomi:

- (C1) • Esiste un oggetto iniziale $0 \in M$ (i.e. $|\text{Hom}(0, A)| = 1 \forall A \in M$)
- 0 è un oggetto cofibrante (i.e. il morfismo $0 \rightarrow 0$ è in Cof)
 - Cof è chiusa per composizione.
 - $\text{Iso}(M) \subseteq W$
 - $f: A \rightarrow B$. Se A è un oggetto cofibrante (i.e. il morfismo $0 \rightarrow A$ è in Cof) ed $f \in \text{Iso}(M)$, allora $f \in W \cap \text{Cof}$.

(C2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismi in M . Se due fra f, g e gf sono equivalenze deboli, allora lo è anche la terza.

(C3) Per ogni coppia di oggetti cofibranti $A, C \in M$ ed ogni cofibrazione $A \xrightarrow{i} B$ si ha:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & C \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \dashrightarrow & B \amalg_A C \end{array}$$

- il pushout $B \amalg_A C$ esiste in M e j è una cofibrazione
- se $i \in W \cap \text{Cof}$, allora $j \in \text{Cof} \cap W$.

(C4) Per ogni oggetto cofibrante $A \in M$ ed ogni morfismo $f: A \rightarrow B$ esiste una fattorizzazione $f = r \circ \tilde{f}$ con $\tilde{f} \in \text{Cof}$ e $r \in W$.

C5) Per ogni insieme di cofibrazioni $\{f_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ con A_i cofibrante $\forall i \in I$ si ha:

- $\coprod A_i$ e $\coprod B_i$ esistono, sono cofibranti e $\coprod f_i \in \text{Cof}$.
- se $f_i \in W_n \text{Cof} \forall i \in I$, allora $\coprod f_i \in W_n \text{Cof}$.

C6) Per ogni successione diretta (numerabile) di cofibrazioni con A_0 cofibrante $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots$ si ha:

- $\text{colim}(A_n)$ esiste in M e il morfismo $A_0 \xrightarrow{f} \text{colim}(A_n)$ è una cofibrante (il morfismo $A_0 \rightarrow \text{colim}(A_n)$ si dice composizione transfinita della successione)
- se $f_i \in W_n \text{Cof} \forall i \in I$, allora $f \in W_n \text{Cof}$.

Oss: L'assioma C2 viene detto "assioma del 2-su-3" (2-out-of-3 axiom). L'assioma C3 (detto "pushout axiom") è essenziale per le costruzioni omotopiche. L'assioma C4 si dice di fattorizzazione (factorization axiom) ed è presente sia nelle costruzioni di Quillen che in quelle di Broun.

Gli assiomi C5 e C6 sono più tecnici che concettuali.

Buona parte della teoria può essere svolta sfruttando C1-C4 (le categorie che non soddisfano C5-C6 si dicono ABC precofibranti). Ci sono delle possibili versioni più deboli di C5 e C6 che potrebbero portare agli stessi risultati, ma per ora la domanda resta aperta.

Oss: Dualizzando gli assiomi C1-C6 otteniamo la struttura di categoria ABC-fibrante (M, W, Fib) .

Def: Una categoria ABC-modello $(M, W, \text{Cof}, \text{Fib})$ è il dato di una categoria M e di tre classi di morfismi W (= equivalenze deboli), Cof (= cofibrazioni) e Fib (= fibrazioni) tali che (M, W, Cof) sia ABC-cofibrante

e (M, W, Fib) sia ABC -fibrante.

Esempi.

- 1) \mathcal{C} categoria eocompleta (i.e. chiusa per colimiti piccoli),
 $W = \text{Iso}(\mathcal{C})$, $\text{Cof} = \text{Mor}(\mathcal{C})$. Allora $(\mathcal{C}, W, \text{Cof})$ è una categoria ABC -cofibrante.
- 2) \mathcal{C} categoria con un oggetto iniziale. $W = \text{Iso}(\mathcal{C}) = \text{Cof}$. Allora $(\mathcal{C}, W, \text{Cof})$ è una categoria ABC -cofibrante.
- 3) $(\mathcal{C}, W, \text{Cof})$ ABC -cofibrante $\Rightarrow (\mathcal{C}^{\text{op}}, W^{\text{op}}, \text{Cof}^{\text{op}})$ ABC -fibrante.
- 4) $(\mathcal{C}_j, W_j, \text{Cof}_j)$ ABC -cofibranti, $j=1,2$. Allora $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, W_1 \times W_2, \text{Cof}_1 \times \text{Cof}_2)$ è ancora ABC -cofibrante.
- 5) R anello commutativo con unità. Definiamo la categoria $\text{coCh}(R)$ dei complessi di R -moduli, i cui morfismi sono i morfismi di complessi. Scegliamo $W = \{\text{quasi-isomorfismi}\}$ e $\text{Cof} = \{\text{morfismi iniettivi grado per grado}\}$. Verifichiamo che $(\text{coCh}(R), W, \text{Cof})$ soddisfa gli assiomi C1-C6.
 - c1) • Il complesso nullo in ogni grado è l'oggetto iniziale.
 - $0' \rightarrow 0'$ è iniettivo in ogni grado $\Rightarrow 0'$ cofibrante.
 - Composizione di morfismi iniettivi è iniettiva.
 - Ogni isomorfismo induce isomorfismi in coomologia
 - $f \in \text{Iso}(\text{coCh}(R)) \Rightarrow f$ iniettiva e f quasi-isomorfismo $\Rightarrow f \in W \cap \text{Cof}$
 - c2) Segue immediatamente dalla functorialità della coomologia.
 - c3) Dato comunque un diagramma della forma
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \\ B & & \end{array}$$
 poniamo $B \amalg_A C = B \times C / \sim$ dove:
$$(b, c) \sim (b', c') \iff \exists a \in A \text{ t.c. } \begin{cases} c - c' = -f(a) \\ b - b' = i(a) \end{cases}$$
 - dunque il pushout esiste e il morfismo $j: C \rightarrow B \amalg_A C$
 $c \mapsto (0, c)$ è iniettivo dal momento che i lo è.

• Se i è un quasi-isomorfismo la tesi segue dalla functorialità della coomologia

c4) Ogni morfismo di complessi si fattorizza per il suo cilindro

$$\text{Cyl}(f) = A' \oplus A[1] \oplus B', \quad d_{\text{Cyl}(f)} = (d_{A'} - \text{id}_{A[1]}, -d_{A[1]}, f_{A[1]} + d_{B'})$$

Infatti poniamo $\tilde{f}: A' \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$ l'inclusione naturale e $r: \text{Cyl}(f) \rightarrow B'$ definita da $r(a, a', b) = f(a) + b$.

Osserviamo che $\tilde{f} \in \text{Cof}$ in quanto chiaramente iniettiva, mentre r è un quasi-isomorfismo (cfr. lezione del 18/11/14)

c5) Sia $\{f_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un insieme di morfismi iniettivi in $\text{coCh}(\mathcal{R})$. Abbiamo:

- $(\coprod A_i)^n = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} A_i^n$ e $(\coprod B_i)^n = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} B_i^n$ con i differenziali definiti componente per componente. L'iniettività di $\coprod f_i$ segue chiaramente dall'iniettività delle singole f_i .

- essendo i differenziali definiti componente per componente si ha $H^n(\coprod A_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} H^n(A_i)$, da cui la tesi.

c6) $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots$ successione numerabile di morfismi iniettivi in $\text{coCh}(\mathcal{R})$. (Chi è $\text{colim}(A_n)$? A livello insiemistico abbiamo $(\text{colim}(A_n))^k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^k$ (stiamo pensando $A_n \subseteq A_{n+1}$ tramite f_n) La struttura di complesso di \mathcal{R} -moduli è data da:

- $x \in (\text{colim}(A_n))^k \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: x \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow d_{A_{\bar{n}}}^k x \in A_{\bar{n}}^{k-1} \subseteq (\text{colim}(A_n))^{k-1}$
- $x, y \in (\text{colim}(A_n))^k \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: x, y \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow x + y \in A_{\bar{n}}^k \subseteq (\text{colim}(A_n))^k$
- $x \in (\text{colim}(A_n))^k, q \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: x \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow qx \in A_{\bar{n}}^k \subseteq (\text{colim}(A_n))^k$

Pertanto $\text{colim}(A_n)$ esiste in $\text{coCh}(\mathcal{R})$ ed il morfismo indotto $A_0 \xrightarrow{f} \text{colim}(A_n)$ è l'inclusione naturale, dunque $f \in \text{Cof}$. Inoltre, se f_i è un quasi-isomorfismo per

ogni $i \in I$, allora \neq è un quasi-isomorfismo. Mostriamo l'injectività in coomologia. Sia $[x] \in H^k(A_0)$ t.c. $[x] = [0] \in H^k(\text{colim } A_i)$.
 $\Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x = d_{A_n}^{k-1} y \in A_n^k, y \in A_n^{k-1} \Rightarrow [x] = [0] \in H^k(A_n) = H^k(A_0)$.
 \Rightarrow L'inclusione naturale \neq è iniettiva in coomologia.

Mostriamo la suriettività: $[x] \in H^k(\text{colim } A_i) \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x \in A_n^k, [x] \in H^k(A_n) = H^k(A_0)$.

Oss: Sia (M, W, Cof) una categoria ABC-cofibrante. Allora la sottocategoria piena M_{cof} degli oggetti cofibranti in M è una categoria ABC-cofibrante.

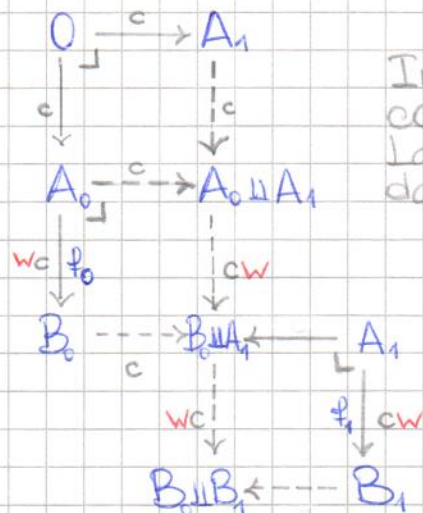
Oss: Ogni sottocategoria piena M' tale che $M_{\text{cof}} \subseteq M' \subseteq M$ è ancora una categoria ABC-cofibrante con cofibrazioni ed equivalenze deboli indotte da M .

Coprodotti finiti.

In generale una ABC-cofibrante non è chiusa per coprodotti finiti.

Lemma: (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Sia $\{f_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ un insieme finito di cofibrazioni con A_i cofibrante per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$. Allora: $\coprod A_i$ e $\coprod B_i$ esistono, $\coprod f_i$ è una cofibrazione. Inoltre se $f_i \in W \forall i \in \{0, \dots, n\}$ anche $\coprod f_i$ è un'equivalenza debole.

Dim: Per induzione ci si riduce al caso $n=1$. Il diagramma a lato mostra la costruzione del morfismo $A_0 \amalg A_1 \rightarrow B_0 \amalg B_1$ che risulta una cofibrazione in quanto composizione di cofibrazioni.



In rosso il caso $f_i \in \text{Cof}$. La tesi segue da C3.

Oss: Non abbiamo sfruttato C5 e C6.

Fattorizzazioni.

Lemma: [Brown, '74] (M, W, Cof) ABC-cofibrante. $f: A \rightarrow B$ morfismo fra oggetti cofibranti. Allora $f = r \circ \tilde{f}$ con $\tilde{f} \in \text{Cof}$ ed r inverso destro di un morfismo $s \in \text{Cof} \cap W$.

Dim: Consideriamo il morfismo $f + \text{id}_B: A \amalg B \rightarrow B$ e sfruttiamo l'assioma C4. Otteniamo una fattorizzazione

$$A \amalg B \xrightarrow{f + \text{id}_B} B \quad \text{con} \quad \begin{cases} r \circ s = \text{id}_B \\ r \circ \tilde{f} = f \end{cases}$$

Ora: \tilde{f} è la composizione $A \xrightarrow{c} A \amalg B \xrightarrow{\tilde{f}} B' \Rightarrow \tilde{f} \in \text{Cof}$.
 s è la composizione $B \xrightarrow{c} A \amalg B \xrightarrow{\tilde{f}} B' \Rightarrow s \in \text{Cof}$
 $r \circ s = \text{id}_B \Rightarrow s \in W$ per l'assioma C2.

Oss: Nell'assioma di fattorizzazione C4 non si richiede funtorialità. Mostriamo allora un risultato di compatibilità.

Lemma: (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Dato il diagramma commutativo a lato con A_1 e A_2 cofibranti in M , per ogni fattorizzazione $f_1 = r_1 \circ \tilde{f}_1$ con $r_1 \in W$ e $\tilde{f}_1 \in \text{Cof}$

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow a & \simeq & \downarrow b \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 \end{array}$$

esiste un diagramma commutativo con: $f_2 = r_2 \circ \tilde{f}_2$, $r_2 \in W$, $\tilde{f}_2 \in \text{Cof}$ e tale che $A_2 \amalg_{A_1} \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2$ sia una cofibrazione.

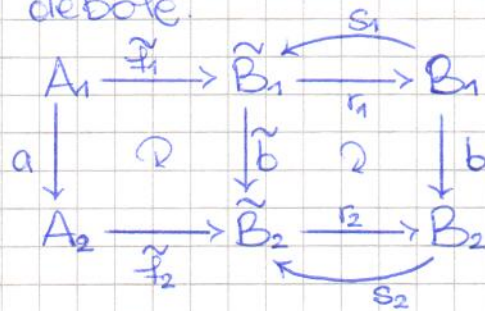
$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & \tilde{A}_1 & \xrightarrow{r_1} & B_1 \\ \downarrow a & \simeq & \downarrow \tilde{a} & \simeq & \downarrow b \\ A_2 & \xrightarrow{\tilde{f}_2} & \tilde{A}_2 & \xrightarrow{r_2} & B_2 \end{array}$$

Dim: Basta considerare il diagramma a lato e definire $\tilde{f}_2 = g \circ j \in \text{Cof}$.

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & \tilde{A}_1 & \xrightarrow{r_1} & B_1 \\ \downarrow a & \simeq & \downarrow \tilde{a} & \simeq & \downarrow b \\ A_2 & \xrightarrow{j} & A_2 \amalg_{A_1} \tilde{A}_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \\ & \searrow \tilde{g} & \downarrow \tilde{c} & \searrow w & \\ & & \tilde{A}_2 & \xrightarrow{r_2} & B_2 \end{array}$$

Un risultato analogo vale anche per la fattorizzazione di Brown:

Prop: (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Dato il diagramma commutativo a lato con A_1 e A_2 cofibranti in M , per ogni fattorizzazione di Brown $f_1 = r_1 \circ \tilde{f}_1$, $r_1 \circ s_1 = \text{id}_{B_1}$ esiste un diagramma commutativo con: $f_2 = r_2 \circ \tilde{f}_2$, $r_2 \circ s_2 = \text{id}_{B_2}$, $\tilde{f}_2 \in \text{Cof}$, $\tilde{f}_2 + s_2 \in \text{Cof}$, $s_2 \in W \cap \text{Cof}$, $A_2 \amalg_{A_1} \tilde{B}_1 \longrightarrow \tilde{B}_2$ cofibrazione, $B_2 \amalg_{B_1} \tilde{B}_1 \longrightarrow \tilde{B}_2$ cofibrazione ed equivalenza debole.



Dim: [cfr. Radulescu-Banu: "Cofibrations in Homotopy Theory"]

Oss: Tutti i risultati ottenuti hanno enunciati "duali" per categorie ABC-fibranti.

Oss: Tutti i risultati ottenuti sono validi in categorie che soddisfano C1-C4 in quanto non abbiamo mai sfruttato C5-C6.

Estensioni

Prop: [Gluing Lemma] (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Dato un

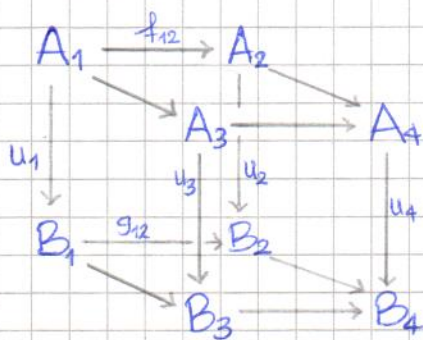
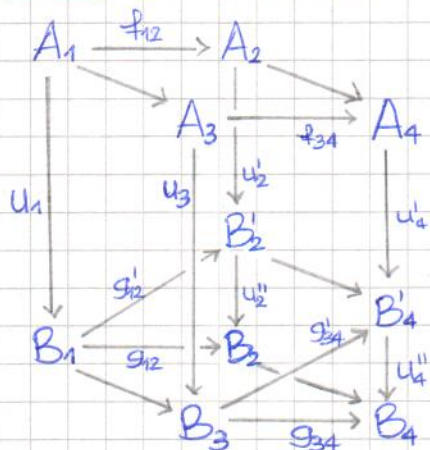


diagramma con tutti gli oggetti cofibranti, $f_{12} \in \text{Cof}$, $g_{12} \in \text{Cof}$, $A_4 = A_3 \amalg_{A_1} A_2$, $B_4 = B_3 \amalg_{B_1} B_2$, allora:

- 1) se $u_1, u_3 \in \text{Cof}$ e $B_1 \amalg_{A_1} A_2 \longrightarrow B_2$ è una cofibrazione, allora $u_2, u_4 \in \text{Cof}$ e $B_3 \amalg_{A_3} A_4 \longrightarrow B_4$ è una cofibrazione.
- 2) se $u_1, u_2, u_3 \in W$, allora $u_4 \in W$.

Dim: Consideriamo il seguente diagramma commutativo, dove



$B'_2 = B_1 \amalg_{A_1} A_2$ e $B'_4 = B_3 \amalg_{A_3} A_4$ (esistono per l'assioma C3). $f_{12} \in \text{Cof} \Rightarrow g'_{12} \in \text{Cof}$.

$f_{12} \in \text{Cof} \Rightarrow f_{34} \in \text{Cof} \Rightarrow g'_{34} \in \text{Cof}$.

Ora, dato che $B'_4 = B_3 \amalg_{B_1} B'_2$, si ha

$B_4 = B'_4 \amalg_{B'_2} B_2$.

1) $u'_2 \in \text{Cof} \Rightarrow u''_4 \in \text{Cof}$ per l'assioma C3.

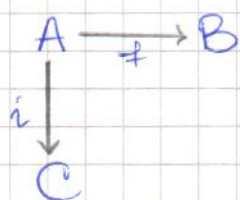
$u_1, u_3 \in \text{Cof} \Rightarrow u'_2, u'_4 \in \text{Cof}$ per l'assioma C3. $\Rightarrow \begin{cases} u_2 = u''_2 \circ u'_2 \in \text{Cof} \\ u_4 = u''_4 \circ u'_4 \in \text{Cof} \end{cases}$

2) Dal "lemma di fattorizzazione relativa di Brown" (i.e. dalla proposizione precedente) segue che possiamo assumere $u_1, u_3, u'_2 \in \text{Cof}$ [cfr. Radulescu-Banu: "Cofibrations in Homotopy Theory"]. Dal momento

che $u_1, u_2, u_3 \in W$, abbiamo $u_1, u_3 \in W \cap \text{Cof} \Rightarrow u'_2, u'_4 \in W \cap \text{Cof}$.

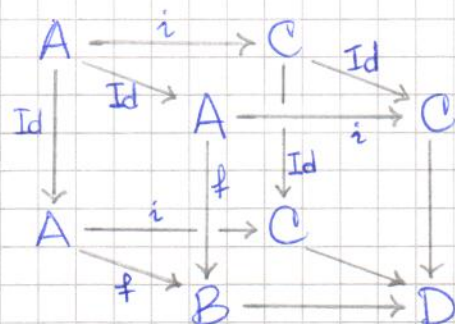
$u'_2, u_2 \in W \Rightarrow u''_2 \in W$ per l'assioma C2 $\Rightarrow u'_2 \in W \cap \text{Cof} \Rightarrow u'_4 \in W \cap \text{Cof}$ per l'assioma C3 $\Rightarrow u_4 \in W$ per l'assioma C2.

Prop: [Excision Lemma] (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Nel dia-



gramma a lato, supponiamo che: A, B e C siano oggetti cofibranti in M , $i \in \text{Cof}$ e $f \in W$. Allora il pushout di f lungo i è un'equivalenza debole.

Dim: Posto $D = B \amalg_A C$ consideriamo il diagramma commutativo a lato e, ricordando che $\text{Id} \in W$, la tesi segue dal "Gluing Lemma".



Oss: In tutti i risultati ottenuti non abbiamo sfruttato gli assiomi C5-C6; dunque restano validi per categorie che soddisfano C1-C4.

Oss: Nell'enunciato dell'excision lemma l'ipotesi di cofibranza dell'oggetto C è garantita dal fatto che $i \in \text{Cof}$ e A è cofibrante. Invece le ipotesi su A e B risultano essenziali per la dimostrazione. In generale, se una categoria ABC -cofibrante verifica la tesi dell'excision lemma per ogni tema di oggetti (non necessariamente cofibranti) si dice "left proper" (letteralmente: regolare a sinistra)

Oss: Entrambi i lemmi di estensione che abbiamo mostrato hanno una versione duale per le categorie ABC -fibranti.

Cylinder object e path object.

Def: (M, W, Cof) ABC -cofibrante. Dato un oggetto $A \in M$ cofibrante, un "cylinder object" per A consiste in un oggetto $IA \in M$ e in una fattorizzazione della codiagonale:

$$A \amalg A \xrightarrow{\Delta} A \quad \text{con } i_0, i_1 \in \text{Cof} \text{ e } p \in W.$$

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ & \searrow & \nearrow \\ A \amalg A & & A \\ & \swarrow i_0 + i_1 & \searrow p \\ & IA & \end{array}$$

Diamo anche la nozione duale per categorie ABC -fibranti.

Def: (M, W, Fib) ABC -fibrante. Dato un oggetto $A \in M$ fibrante, un "path object" per A consiste in un oggetto $A^I \in M$ e in una fattorizzazione della diagonale:

$$A \xrightarrow{\Delta} A \amalg A \quad \text{con } (p_0, p_1) \in \text{Fib} \text{ e } i \in W.$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \amalg A \\ & \searrow i & \nearrow (p_0, p_1) \\ & A^I & \end{array}$$

Lemma: [esistenza di cylinder object e path object]

- 1) (M, W, Cof) ABC -cofibrante, $A \in M$ cofibrante. Allora esiste un cylinder object per A .
- 2) (M, W, Fib) ABC -fibrante, $A \in M$ fibrante. Allora esiste un path object per A .

Dim: A cofibrante $\Rightarrow A \amalg A$ esiste ed è cofibrante. (1 \Rightarrow tesi. 2) è duale.