Un po' di storia.

Negli anni sessanta D.G. Quillen introduce il concetto di categoria modello. Si tratta sostanzialmente di una categoria $\mathcal{M}$ con tre classi di morfismi $(\mathcal{M}, W, Cof, Fib)$ che soddisfano determinati assiomi.

In presenza di strutture modello si riesce a "fare dell'omotopia" sulla categoria $\mathcal{M}$. La potenza degli assiomi di Quillen viene messa in luce dai lavori di D.M. Kan e dei suoi studenti: W.G. Dwyer, P.S. Hirschhorne, J. Smith.

Nel 1974 K.S. Brown nel suo lavoro "Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology" introduce la nozione di "categoria a oggetti fibranti" $(\mathcal{C}, W, Fib)$, essenzialmente rimuovendo dalla struttura modello tutti gli assiomi riguardanti la classe Cof. Pochi anni più tardi D.W. Anderson riprende e sviluppa il lavoro di Brown nel suo "Fibrations and Geometric realizations". Forse per il titolo "troppo poco astratto" e per il suo quasi immediato ritiro dalla Matematica il suo lavoro non ottiene molto successo e solo dopo venticinque anni (nel 2002) D.C. Cisinski riprenderà i suoi assiomi, completando le dimostrazioni omesse da Anderson e mostrando che per le usuali costruzioni omotopiche questo sembra essere il "setting più naturale".

Anche Cisinski non porta a termine il suo progetto, ma decide di condividere i suoi risultati con A. Radulescu-Banu che nel 2009 completa il suo lavoro "Cofibrations in homotopy theory", dove ricostruisce sviluppa e confronta fra loro i

vari approcci assiomatici citati.
L'idea dell'incontro di oggi è quella di ripercorrere la prima parte del lavoro di Radulescu-Banu, introducendo le cosiddette categorie Anderson-Brown-Cisinski cofibranti (o semplicemente ABC cofibranti) e studiandone le prime proprietà.

Gli assiomi.

<u>Def</u>: Una categoria ABC-cofibrante $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, Cof)$ è il dato di una categoria $\mathcal{M}$ e due classi di morfismi $\mathcal{W}$ (= equivalenze deboli) e Cof (= cofibrazioni) che soddisfano i seguenti assiomi:

(C1)
- Esiste un oggetto iniziale $0 \in \mathcal{M}$ (i.e. $|Hom(0,A)|=1 \ \forall A \in \mathcal{M}$)
- 0 è un oggetto cofibrante (i.e. il morfismo $0 \to 0$ è in Cof)
- Cof è chiusa per composizione.
- $Iso(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{W}$
- $f: A \to B$. Se A è un oggetto cofibrante (i.e. il morfismo $0 \to A$ è in Cof) ed $f \in Iso(\mathcal{M})$, allora $f \in \mathcal{W} \cap Cof$.

(C2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismi in $\mathcal{M}$. Se due fra f, g e gf sono equivalenze deboli, allora lo è anche la terza.

(C3) Per ogni coppia di oggetti cofibranti $A, C \in \mathcal{M}$ ed ogni cofibrazione $A \xrightarrow{i} B$ si ha:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, dotted, "j"] \\ B \arrow[r, dotted] & B \amalg_A C \end{tikzcd}$$

- il pushout $B \amalg_A C$ esiste in $\mathcal{M}$ e j è una cofibrazione
- se $i \in \mathcal{W} \cap Cof$, allora $j \in Cof \cap \mathcal{W}$.

(C4) Per ogni oggetto cofibrante $A \in \mathcal{M}$ ed ogni morfismo $f: A \to B$ esiste una fattorizzazione $f = r \circ \tilde{f}$ con $\tilde{f} \in Cof$ e $r \in \mathcal{W}$.

C5) Per ogni insieme di cofibrazioni $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ con A_i cofibrante $\forall i \in I$ si ha:

- $\amalg A_i$ e $\amalg B_i$ esistono, sono cofibranti e $\amalg f_i \in Cof$.
- se $f_i \in W \cap Cof$ $\forall i \in I$, allora $\amalg f_i \in W \cap Cof$.

C6) Per ogni successione diretta (numerabile) di cofibrazioni con A_0 cofibrante $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$ si ha:

- $colim(A_n)$ esiste in M e il morfismo $A_0 \xrightarrow{f} colim(A_n)$ è una cofibrazione. (il morfismo $A_0 \to colim(A_n)$ si dice composizione transfinita della successione)
- se $f_i \in W \cap Cof$ $\forall i \in I$, allora $f \in W \cap Cof$.

Oss: L'assioma C2 viene detto "assioma del 2-su-3" (2-out-of-3 axiom). L'assioma C3 (detto "pushout axiom") è essenziale per le costruzioni omotopiche. L'assioma C4 si dice di fattorizzazione (factorization axiom) ed è presente sia nelle costruzioni di Quillen che in quelle di Brown. Gli assiomi C5 e C6 sono più tecnici che concettuali. Buona parte della teoria può essere svolta sfruttando C1 - C4 (le categorie che non soddisfano C5-C6 si dicono ABC precofibranti). Ci sono delle possibili versioni più deboli di C5 e C6 che potrebbero portare agli stessi risultati, ma per ora la domanda resta aperta.

Oss: Dualizzando gli assiomi C1-C6 otteniamo la struttura di categoria ABC-fibrante (M, W, Fib).

Def: Una categoria ABC-modello (M, W, Cof, Fib) è il dato di una categoria M e di tre classi di morfismi W (= equivalenze deboli), Cof (= cofibrazioni) e Fib (= fibrazioni) tali che (M, W, Cof) sia ABC-cofibrante e (M, W, Fib) sia ABC-fibrante.

Esempi.

1) $\mathcal{C}$ categoria cocompleta (i.e. chiusa per colimiti piccoli), $W = Iso(\mathcal{C})$, $Cof = Mor(\mathcal{C})$. Allora $(\mathcal{C}, W, Cof)$ è una categoria ABC-cofibrante.

2) $\mathcal{C}$ categoria con un oggetto iniziale. $W = Iso(\mathcal{C}) = Cof$. Allora $(\mathcal{C}, W, Cof)$ è una categoria ABC-cofibrante.

3) $(\mathcal{C}, W, Cof)$ ABC-cofibrante $\Rightarrow (\mathcal{C}^{op}, W^{op}, Cof^{op})$ ABC-fibrante.

4) $(\mathcal{C}_j, W_j, Cof_j)$ ABC-cofibranti, $j = 1,2$. Allora $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, W_1 \times W_2, Cof_1 \times Cof_2)$ è ancora ABC-cofibrante.

5) R anello commutativo con unità. Definiamo la categoria $coCh(R)$ dei complessi di R-moduli, i cui morfismi sono i morfismi di complessi. Scegliamo $W = \{\text{quasi-isomorfismi}\}$ e $Cof = \{\text{morfismi iniettivi grado per grado}\}$. Verifichiamo che $(coCh(R), W, Cof)$ soddisfa gli assiomi C1 - C6.

C1)
- Il complesso nullo in ogni grado è l'oggetto iniziale.
- $0^\cdot \longrightarrow 0^\cdot$ è iniettivo in ogni grado $\Rightarrow 0^\cdot$ cofibrante.
- Composizione di morfismi iniettivi è iniettiva.
- Ogni isomorfismo induce isomorfismi in coomologia
- $f \in Iso(coC(R)) \Rightarrow f$ iniettiva e f quasi-isomorfismo $\Rightarrow f \in W \cap Cof$

C2) Segue immediatamente dalla funtorialità della coomologia.

C3) Dato comunque un diagramma della forma
$$\begin{array}{ccc} A^\cdot & \xrightarrow{f} & C^\cdot \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ B^\cdot & & \end{array}$$
poniamo $B^\cdot \amalg_{A^\cdot} C^\cdot = B^\cdot \times C^\cdot /_\sim$ dove:
$$(b,c) \sim (b',c') \iff \exists\, a \in A^\cdot \text{ t.c. } \begin{cases} c - c' = -f(a) \\ b - b' = i(a) \end{cases}$$

- dunque il pushout esiste e il morfismo $j : \begin{array}{l} C^\cdot \to B^\cdot \amalg_{A^\cdot} C^\cdot \\ c \mapsto (0,c) \end{array}$ è iniettivo dal momento che i lo è.

· Se i è un quasi-isomorfismo la tesi segue dalla funtorialità della coomologia

C4) Ogni morfismo di complessi fattorizza per il suo cilindro
$Cyl(f) = A^{\cdot} \oplus A[1]^{\cdot} \oplus B^{\cdot}$, $d_{Cyl(f)} = (d_{A^{\cdot}} - id_{A[1]^{\cdot}}, -d_{A[1]^{\cdot}}, f_{A[1]^{\cdot}} + d_{B^{\cdot}})$
Infatti poniamo $\tilde{f}: A^{\cdot} \hookrightarrow Cyl(f)$ l'inclusione naturale e $r: Cyl(f) \longrightarrow B^{\cdot}$ definita da $r(a, a', b) = f(a) + b$.
Osserviamo che $\tilde{f} \in Cof$ in quanto chiaramente iniettiva, mentre r è un quasi-isomorfismo (cfr. lezione del 18/11/14)

C5) Sia $\{f_i : A_i^{\cdot} \longrightarrow B_i^{\cdot}\}_{i \in I}$ un insieme di morfismi iniettivi in $coCh(R)$. Abbiamo:

· $(\amalg A_i^{\cdot})^n = \bigoplus_{i \in I} A_i^n$ e $(\amalg B_i^{\cdot})^n = \bigoplus_{i \in I} B_i^n$ con i differenziali definiti componente per componente. L'iniettività di $\amalg f_i$ segue chiaramente dall'iniettività delle singole f_i.

· essendo i differenziali definiti componente per componente si ha $H^n(\amalg A_i^{\cdot}) = \bigoplus_{i \in I} H^n(A_i^{\cdot})$, da cui la tesi.

C6) $A_0^{\cdot} \xrightarrow{f_0} A_1^{\cdot} \xrightarrow{f_1} A_2^{\cdot} \xrightarrow{f_2} \cdots$ successione numerabile di morfismi iniettivi in $coCh(R)$. Chi è $colim(A_n^{\cdot})$? A livello insiemistico abbiamo $(colim(A_n^{\cdot}))^k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^k$ (stiamo pensando $A_n \subseteq A_{n+1}$ tramite f_n) La struttura di complesso di R-moduli è data da:

- $x \in (colim(A_n^{\cdot}))^k \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow d_{A_{\bar{n}}}^k x \in A_{\bar{n}}^{k+1} \subseteq (colim(A_n^{\cdot}))^{k+1}$
- $x, y \in (colim(A_n^{\cdot}))^k \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x, y \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow x + y \in A_{\bar{n}}^k \subseteq (colim(A_n^{\cdot}))^k$
- $x \in (colim(A_n^{\cdot}))^k, q \in R \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x \in A_{\bar{n}}^k \Rightarrow qx \in A_{\bar{n}}^k \subseteq (colim(A_n^{\cdot}))^k$

Pertanto $colim(A_n^{\cdot})$ esiste in $coCh(R)$ ed il morfismo indotto $A_0^{\cdot} \xrightarrow{f} colim(A_n^{\cdot})$ è l'inclusione naturale, dunque $f \in Cof$. Inoltre, se f_i è un quasi-isomorfismo per

ogni $i \in I$, allora f è un quasi-isomorfismo. Mostriamo l'iniettività in coomologia. Sia $[x] \in H^k(A_0)$ t.c. $[x]=[0] \in H^k(\mathrm{colim}\, A_i^{\bullet})$.
$\Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: x = d^{k-1}_{A_{\bar{n}}} y \in A^k_{\bar{n}},\ y \in A^{k-1}_{\bar{n}} \Rightarrow [x]=[0] \in H^k(A^{\bullet}_{\bar{n}}) = H^k(A^{\bullet}_0)$.
$\Rightarrow$ L'inclusione naturale f è iniettiva in coomologia.
Mostriamo la suriettività: $[x] \in H^k(\mathrm{colim}\, A_i^{\bullet}) \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: $x \in A^k_{\bar{n}}$, $[x] \in H^k(A^{\bullet}_{\bar{n}}) = H^k(A^{\bullet}_0)$.

<u>Oss:</u> Sia (M, W, Cof) una categoria ABC-cofibrante. Allora la sottocategoria piena M_{cof} degli oggetti cofibranti in M è una categoria ABC-cofibrante.

<u>Oss:</u> Ogni sottocategoria piena M' tale che $M_{cof} \subseteq M' \subseteq M$ è ancora una categoria ABC-cofibrante con cofibrazioni ed equivalenze deboli indotte da M.

<u>Coprodotti finiti.</u>

In generale una ABC-cofibrante non è chiusa per coprodotti finiti.

<u>Lemma:</u> (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Sia $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i \in \{0,\dots,n\}}$ un insieme finito di cofibrazioni con A_i cofibrante per ogni $i \in \{0,\dots,n\}$. Allora: $\amalg A_i$ e $\amalg B_i$ esistono, $\amalg f_i$ è una cofibrazione. Inoltre se $f_i \in W$ $\forall i \in \{0,\dots,n\}$ anche $\amalg f_i$ è un'equivalenza debole.

<u>Dim:</u> Per induzione ci si riduce al caso $n=1$. Il diagramma a lato mostra la costruzione del morfismo $A_0 \amalg A_1 \to B_0 \amalg B_1$ che risulta una cofibrazione in quanto composizione di cofibrazioni.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & A_1 \arrow[d, dashed, "c"] & \\
A_0 \arrow[r, dashed, "c"] \arrow[d, "f_0", "wc"'] & A_0 \amalg A_1 \arrow[d, dashed, "cw"] & \\
B_0 \arrow[r, dashed, "c"'] & B_0 \amalg A_1 \arrow[d, dashed, "wc"'] & A_1 \arrow[l] \arrow[d, "f_1"', "cw"] \\
 & B_0 \amalg B_1 & B_1 \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

In rosso il caso $f_i \in W \cap Cof$. La tesi segue da C3.

Oss: Non abbiamo sfruttato C5 e C6.

Fattorizzazioni.

Lemma: [Brown, '74] $(\mathcal{M}, W, Cof)$ ABC-cofibrante. $f: A \to B$ morfismo fra oggetti cofibranti. Allora $f = r \circ \tilde{f}$ con $\tilde{f} \in Cof$ ed r inverso destro di un morfismo $s \in Cof \cap W$.

Dim: Consideriamo il morfismo $f + id_B : A \amalg B \to B$ e sfruttiamo l'assioma C4. Otteniamo una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} A \amalg B \arrow[rr, "f+id_B"] \arrow[dr, "c", "\tilde{f}+s"'] & & B \\ & B' \arrow[ur, "W", "r"'] & \end{tikzcd} \quad \text{con } \begin{cases} r \circ s = id_B \\ r \circ \tilde{f} = f \end{cases}$$

cofibrazione per l'assioma C3

Ora: $\tilde{f}$ è la composizione $A \xrightarrow[c]{} A \amalg B \xrightarrow[c]{\tilde{f}+s} B' \Rightarrow \tilde{f} \in Cof$.

s è la composizione $B \xrightarrow[c]{} A \amalg B \xrightarrow[c]{\tilde{f}+s} B' \Rightarrow s \in Cof$

$r \circ s = id_B \Rightarrow s \in W$ per l'assioma C2.

Oss: Nell'assioma di fattorizzazione C4 non si richiede funtorialità. Mostriamo allora un risultato di compatibilità.

Lemma: $(\mathcal{M}, W, Cof)$ ABC-cofibrante. Dato il diagramma commutativo a lato con A_1 e A_2 cofibranti in $\mathcal{M}$, per ogni fattorizzazione $f_1 = r_1 \circ \tilde{f}_1$ con $r_1 \in W$ e $\tilde{f}_1 \in Cof$ esiste un diagramma commutativo con: $f_2 = r_2 \circ \tilde{f}_2$, $r_2 \in W$, $\tilde{f}_2 \in Cof$ e tale che $A_2 \amalg_{A_1} \tilde{A}_1 \to \tilde{A}_2$ sia una cofibrazione.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_1 \arrow[d, "b"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tilde{f}_1"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{A}_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "\tilde{a}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_1 \arrow[d, "b"] \\ A_2 \arrow[r, "\tilde{f}_2"'] & \tilde{A}_2 \arrow[r, "r_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

Dim: Basta considerare il diagramma a lato e definire $\tilde{f}_2 = g \circ j \in Cof$.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tilde{f}_1", "c"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{A}_1 \arrow[rr, "r_1", "W"'] \arrow[d, dashed] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & B_1 \arrow[d, "b"] \\ A_2 \arrow[r, dashed, "c", "j"'] & A_2 \amalg_{A_1} \tilde{A}_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "c", "\tilde{g}"'] & \circlearrowleft & B_2 \\ & & \tilde{A}_2 \arrow[ur, "W", "r_2"'] & \end{tikzcd}$$

Un risultato analogo vale anche per la fattorizzazione di Brown:

Prop: $(\mathcal{M}, W, Cof)$ ABC-cofibrante. Dato il diagramma commutativo a lato con A_1 e A_2 cofibranti in $\mathcal{M}$, per ogni fattorizzazione di Brown $f_1 = r_1 \circ \tilde{f}_1$, $r_1 \circ s_1 = id_{B_1}$ esiste un diagramma commutativo con: $f_2 = r_2 \circ \tilde{f}_2$, $r_2 \circ s_2 = id_{B_2}$, $\tilde{f}_2 \in Cof$, $\tilde{f}_2 + s_2 \in Cof$, $s_2 \in W \cap Cof$, $A_2 \amalg_{A_1} \tilde{B}_1 \longrightarrow \tilde{B}_2$ cofibrazione, $B_2 \amalg_{B_1} \tilde{B}_1 \longrightarrow \tilde{B}_2$ cofibrazione ed equivalenza debole.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B_1 \arrow[d, "b"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tilde{f}_1"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{B}_1 \arrow[r, "r_1"'] \arrow[d, "\tilde{b}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B_1 \arrow[d, "b"] \arrow[l, bend right, "s_1"'] \\ A_2 \arrow[r, "\tilde{f}_2"'] & \tilde{B}_2 \arrow[r, "r_2"] & B_2 \arrow[l, bend left, "s_2"] \end{tikzcd}$$

Dim: [cfr. Radulescu-Banu: "Cofibrations in Homotopy Theory"]

Oss: Tutti i risultati ottenuti hanno enunciati "duali" per categorie ABC-fibranti.

Oss: Tutti i risultati ottenuti sono validi in categorie che soddisfano C1-C4 in quanto non abbiamo mai sfruttato C5-C6.

Estensioni.

Prop: [Gluing Lemma] $(\mathcal{M}, W, Cof)$ ABC-cofibrante. Dato un diagramma con tutti gli oggetti cofibranti, $f_{12} \in Cof$, $g_{12} \in Cof$, $A_4 = A_3 \amalg_{A_1} A_2$, $B_4 = B_3 \amalg_{B_1} B_2$, allora:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] A_1 \arrow[rr, "f_{12}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "u_1"'] & & A_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "u_2" near start] & \\ & A_3 \arrow[rr, crossing over] & & A_4 \arrow[dd, "u_4"] \\ B_1 \arrow[rr, "g_{12}" near end] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dr] & \\ & B_3 \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "u_3" near start] & & B_4 \end{tikzcd}$$

1) se $u_1, u_3 \in Cof$ e $B_1 \amalg_{A_1} A_2 \longrightarrow B_2$ è una cofibrazione, allora $u_2, u_4 \in Cof$ e $B_3 \amalg_{A_3} A_4 \longrightarrow B_4$ è una cofibrazione.

2) se $u_1, u_2, u_3 \in W$, allora $u_4 \in W$.

Dim: Consideriamo il seguente diagramma commutativo, dove

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f_{12}"] \arrow[dr] \arrow[dddd, "u_1"'] & & A_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "u'_2"] & \\
& A_3 \arrow[rr, "f_{34}"'] \arrow[dddd, "u_3"] & & A_4 \arrow[dd, "u'_4"] \\
& & B'_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "u''_2"] & \\
& & & B'_4 \arrow[dd, "u''_4"] \\
B_1 \arrow[uurr, "g'_{12}"] \arrow[rr, "g_{12}"'] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dr] & \\
& B_3 \arrow[uurr, "g'_{34}"] \arrow[rr, "g_{34}"'] & & B_4
\end{tikzcd}$$

$B'_2 = B_1 \amalg_{A_1} A_2$ e $B'_4 = B_3 \amalg_{A_3} A_4$ (esistono per l'assioma C3). $f_{12} \in Cof \Rightarrow g'_{12} \in Cof$. $f_{12} \in Cof \Rightarrow f_{34} \in Cof \Rightarrow g'_{34} \in Cof$.

Ora, dato che $B'_4 = B_3 \amalg_{B_1} B'_2$, si ha $B_4 = B'_4 \amalg_{B'_2} B_2$.

1) $u''_2 \in Cof \Rightarrow u''_4 \in Cof$ per l'assioma C3. $u_1, u_3 \in Cof \Rightarrow u'_2, u'_4 \in Cof$ per l'assioma C3. $\Rightarrow \begin{cases} u_2 = u''_2 \circ u'_2 \in Cof \\ u_4 = u''_4 \circ u'_4 \in Cof \end{cases}$

2) Dal "lemma di fattorizzazione relativa di Brown" (i.e. dalla proposizione precedente) segue che possiamo assumere $u_1, u_3, u''_2 \in Cof$ [cfr. Radulescu-Banu: "Cofibrations in Homotopy Theory"]. Dal momento che $u_1, u_2, u_3 \in W$, abbiamo $u_1, u_3 \in W \cap Cof \Rightarrow u'_2, u'_4 \in W \cap Cof$. $u'_2, u_2 \in W \Rightarrow u''_2 \in W$ per l'assioma C2 $\Rightarrow u''_2 \in W \cap Cof \Rightarrow u''_4 \in W \cap Cof$ per l'assioma C3 $\Rightarrow u_4 \in W$ per l'assioma C2.

Prop: [Excision Lemma] (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Nel diagramma a lato,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "i"'] & B \\
C &
\end{tikzcd}$$

supponiamo che: A, B e C siano oggetti cofibranti in M, $i \in Cof$ e $f \in W$. Allora il pushout di f lungo i è un'equivalenza debole.

Dim: Posto $D = B \amalg_A C$ consideriamo il diagramma commutativo a lato e, ricordando che $Id \in W$, la tesi segue dal "Gluing Lemma".

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "Id"] \arrow[dd, "Id"'] & & C \arrow[dr, "Id"] \arrow[dd, "Id"] & \\
& A \arrow[rr, "i"'] \arrow[dd, "f"] & & C \arrow[dd] \\
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dr] & \\
& B \arrow[rr] & & D
\end{tikzcd}$$

Oss: In tutti i risultati ottenuti non abbiamo sfruttato gli assiomi C5-C6; dunque restano validi per categorie che soddisfano C1-C4.

Oss: Nell'enunciato dell'excision lemma l'ipotesi di cofibranza dell'oggetto C è garantita dal fatto che $i \in Cof$ e A è cofibrante. Invece le ipotesi su A e B risultano essenziali per la dimostrazione. In generale, se una categoria ABC-cofibrante verifica la tesi dell'excision lemma per ogni terna di oggetti (non necessariamente cofibranti) si dice "left proper" (letteralmente: regolare a sinistra)

Oss: Entrambi i lemmi di estensione che abbiamo mostrato hanno una versione duale per le categorie ABC-fibranti.

Cylinder object e path object.

Def: (M, W, Cof) ABC-cofibrante. Dato un oggetto $A \in M$ cofibrante, un "cylinder object" per A consiste in un oggetto $IA \in M$ e in una fattorizzazione della codiagonale:

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, "i_0+i_1"'] & & A \\ & IA \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

con $i_0+i_1 \in Cof$ e $p \in W$.

Diamo anche la nozione duale per categorie ABC-fibranti.

Def: (M, W, Fib) ABC-fibrante. Dato un oggetto $A \in M$ fibrante, un "path object" per A consiste in un oggetto $A^I \in M$ e in una fattorizzazione della diagonale:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i"'] & & A \Pi A \\ & A^I \arrow[ur, "(p_0,p_1)"'] & \end{tikzcd}$$

con $(p_0, p_1) \in Fib$ e $i \in W$.

Lemma: [esistenza di cylinder object e path object]

1) (M, W, Cof) ABC-cofibrante, $A \in M$ cofibrante. Allora esiste un cylinder object per A.

2) (M, W, Fib) ABC-fibrante. $A \in M$ fibrante. Allora esiste un path object per A.

Dim: A cofibrante $\Rightarrow$ $A \sqcup A$ esiste ed è cofibrante. C4 $\Rightarrow$ tesi. 2) è duale.