1

Deformazioni di schemi II

Come nello scorso seminario K è campo algebricamente chiuso, tutti gli schemi considerati sono definiti su K, separati e localmente noetheriani; tutti gli anelli sono commutativi unitari, anche gli omomorfismi di anelli sono unitari.

Sono prese in considerazione le seguenti categorie

$\mathcal{A}^*$: oggetti: K-algebre locali noetheriane con campo residuo K

morfismi: omomorfismi di K-algebre locali

e le sue sottocategorie piene

$\mathcal{A}$ con oggetti le K-algebre locali artiniane con campo residuo K

$\hat{\mathcal{A}}$ con oggetti le K-algebre locali noetheriane complete con campo residuo K.

Inoltre, fissato Λ in $Ob(\hat{\mathcal{A}})$

$\hat{\mathcal{A}}_\Lambda$ con oggetti le Λ-algebre noetheriane locali complete con campo residuo K

$\mathcal{A}_\Lambda$ con oggetti le Λ-algebre artiniane locali con campo residuo K.

In entrambi i casi i morfismi sono gli omomorfismi locali di Λ-algebre.

Def

Siano X uno schema algebrico, ξ: $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} K & \to & \operatorname{Spec} A \end{array}$ una deformazione infinitesimale di X e $e: 0 \to (t) \to \tilde{A} \to A \to 0$ un'estensione piccola in $\mathcal{A}$.

Un sollevamento di ξ ad una deformazione di X su $\tilde{A}$ è una deformazione di X su $\tilde{A}$ $\tilde{\xi}$: $\begin{array}{ccc} X & \to & \tilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} K & \to & \operatorname{Spec} \tilde{A} \end{array}$ insieme a un isomorfismo di deformazioni $\varphi: \mathcal{X} \to \tilde{\mathcal{X}} \times_{\operatorname{Spec} \tilde{A}} \operatorname{Spec} A$.

Prop. 1 Sia X una varietà algebrica nonsingolare e sia ξ una deformazione ~~di X su A~~ infinitesimale di X su A.

(i) Ad ogni estensione piccola e di A in $\mathcal{A}$ si può associare un elemento $o_\xi(e) \in H^2(X, T_X)$ chiamato ostruzione al sollevamento di ξ ad $\tilde{A}$. $o_\xi(e) = 0$ se e solo se ξ si solleva.

(ii) Se $o_\xi(\varepsilon)=0$, $H^1(X,T_X)$ agisce transitivamente sulle classi di isomorfismo di sollevamenti di ξ ad $\tilde A$.

dim (i) Sia $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di aperti affini di X.
$\forall i\in I$ U_i è rigido, dato che è affine nonsingolare (teorema 1 del seminario scorso), pertanto $\forall i\in I$ $\exists$ un isomorfismo $\theta_i: U_i\times \operatorname{Spec} A \to \mathcal{X}_{|U_i}$.
$\forall i,j\in I$ $\theta_{ij}:=\theta_i^{-1}\theta_j$ è un automorfismo della deformazione banale $U_{ij}\times \operatorname{Spec} A$ e $\theta_{ij}\theta_{jk}\theta_{ik}^{-1}$ è l'identità di $U_{ijk}\times \operatorname{Spec} A$.

Dare un sollevamento $\tilde\xi$ di ξ ad $\tilde A$ è equivalente a dare $\forall i,j\in I$ un automorfismo $\tilde\theta_{ij}: U_{ij}\times \operatorname{Spec}\tilde A \to U_{ij}\times \operatorname{Spec}\tilde A$ t.c.
(a) $\forall i,j,k\in I$ $\tilde\theta_{ij}\tilde\theta_{jk}=\tilde\theta_{ik}$ su $U_{ijk}\times \operatorname{Spec}\tilde A$
(b) $\tilde\theta_{ij}$ si restringe a θ_{ij} su $U_{ij}\times \operatorname{Spec} A$ $\forall i,j\in I$

Infatti tali $\tilde\theta_{ij}$ permettono di definire $\tilde{\mathcal{X}}$ per incollamento.

Consideriamo $\{\tilde\theta_{ij}\}_{i,j\in I}$ automorfismi di $U_{ij}\times \operatorname{Spec}\tilde A$ che verificano (b).

Esistono perché gli U_{ij} sono affini nonsingolari e dunque si può applicare il seguente lemma:

<u>Lemma 1</u> Sia B_0 una K-algebra liscia e sia $0\to(t)\to\tilde A\to A\to 0$ un'estensione piccola in A. Siano $\tilde A\to\tilde B$ una deformazione di B_0 su $\tilde A$ e $A\to B=\tilde B\otimes_{\tilde A} A$ la deformazione indotta di B_0 su A. Sia $\sigma: B\to B$ un automorfismo di quest'ultima. Sotto queste ipotesi $\operatorname{Aut}_\sigma(\tilde B):=\{$automorfismi $\tau:\tilde B\to\tilde B$ t.c. $\tau\otimes_{\tilde A} A=\sigma\}\neq\emptyset$.

[dim. (lemma) B_0 liscia $\Rightarrow$ $\tilde A\to\tilde B$ è una deformazione banale (B_0 è rigida sempre per il teorema 1 del seminario scorso) $\Rightarrow \exists$ $\tilde A$-isomorfismo $\tilde B\cong B_0\otimes_K \tilde A \Rightarrow \tilde B$ è liscia su $\tilde A$. Si consideri il seguente diagramma di $\tilde A$-algebre:

$$\begin{tikzcd} \tilde B \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] & B \\ & & \tilde B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dato che $\tilde B$ è liscia su $\tilde A$ e $\tilde B\to B$ è un'estensione di $\tilde A$-algebre, allora $\exists\, \tau:\tilde B\to\tilde B$ che rende il diagramma commutativo. Si verifica facilmente che τ è un isomorfismo e dunque $\tau \in \mathrm{Aut}_{\xi}(\tilde{B})$.

q.e.d.

$\forall\, i,j,k \in I$ $\tilde{\theta}_{ijk} = \tilde{\theta}_{ij}\tilde{\theta}_{jk}\tilde{\theta}_{ik}^{-1}$ è un automorfismo di $U_{ijk} \times \mathrm{Spec}\,\tilde{A}$ che si restringe all'identità di $U_{ijk} \times \mathrm{Spec}\,A$.

Pertanto è possibile identificare $\tilde{\theta}_{ijk}$ con $\tilde{d}_{ijk} \in \Gamma(U_{ijk}, T_X)$ (analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della ~~corrispondenza~~ di Kodaira-Spencer, per maggiori dettagli cfr [S] dimostrazione della proposizione 1.2.12 (ii)). $\{\tilde{d}_{ijk}\}$ è un 2-cociclo di Čech e definisce un elemento $o_{\xi}(e) \in H^2(X, T_X)$.

Si verifica che altri automorfismi θ'_{ij} di $U_{ij} \times \mathrm{Spec}\,\tilde{A}$ che verificano (b) sono della forma $\theta'_{ij} = \tilde{\theta}_{ij} + t\, d_{ij}$ (*) per qualche $d_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, T_X)$ (è conseguenza del lemma 1.2.8 (i) di [S] che è una variante .... del lemma 3 dello scorso seminario)

Quindi $\forall\, i,j,k \in I$ $\theta'_{ij}\theta'_{jk}\theta'^{-1}_{ik}$ corrisponde a $d'_{ijk} = \tilde{d}_{ijk} + d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} \in \Gamma(U_{ijk}, T_X)$, quindi i cocicli $\{d'_{ijk}\}$ e $\{\tilde{d}_{ijk}\}$ sono coomologhi e $o_{\xi}(e)$ è ben definito (in realtà resterebbe da dimostrare che è indipendente dal ricoprimento $\mathcal{U}$)

Inoltre

$o_{\xi}(e) = 0 \iff \exists \{\tilde{\theta}_{ij}\}$ tale che $\tilde{d}_{ijk} = 0$ $\forall\, i,j,k$ $\iff$ vale (a) $\iff \exists\, \tilde{\xi}$ sollevamento di ξ ad $\tilde{A}$.

(ii) Da (i) segue che $o_{\xi}(e) = 0$ implica che esiste $\tilde{\xi}$ sollevamento di ξ.

Scegliamo $\{\tilde{\theta}_{ij}\}$ che verificano (a) e (b), cioè t.c. i $\tilde{d}_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, T_X)$ sono tali che $\tilde{d}_{ijk} = 0$ $\forall\, i,j,k$.

Un altro sollevamento $\bar{\xi}$ di ξ corrisponde a un'altra scelta di $\{\theta'_{ij}\}$ della forma (*) come sopra è tale che $d'_{ijk} = 0 = d_{ij} + d_{jk} - d_{ik}$ $\Rightarrow$ $\{d_{ij}\}_{ij}$ definisce un elemento $d \in H^1(X, T_X)$ (che dipende solo dalla classe di isomorfismo di $\bar{\xi}$). Quindi $(d, \tilde{\xi}) \mapsto \bar{\xi}$ è l'azione transitiva cercata

q.e.d.

Def. Una deformazione infinitesimale ξ di una varietà nonsingolare X su A si dice non ostruita se $o_\xi(e)=0$ per ogni estensione piccola e di A in $\mathcal{A}$; altrimenti si dice ostruita.
X si dice nonostruita se ogni sua deformazione infinitesimale è non ostruita, altrimenti si dice ostruita.

Corollario 1 Sia X varietà nonsingolare. $H^2(X,\Theta_X)=0 \Rightarrow X$ è non ostruita

Corollario 2 Sia X una varietà non singolare. X è rigida $\Longleftrightarrow H^1(X,\Theta_X)=0$

dim. ($\Rightarrow$) È una conseguenza immediata della corrispondenza di Kodaira-Spencer
($\Leftarrow$) Dalla corrispondenza di Kodaira-Spencer segue che tutte le deformazioni del primo ordine di X sono banali mentre dal punto (ii) della proposizione segue che ogni deformazione ha al più un sollevamento a meno di isomorfismi. Quindi segue immediatamente che tutte le deformazioni infinitesimali sono banali.

Osservazione Esistono risultati simili alla corrispondenza di Kodaira-Spencer e a questa proposizione anche nel caso nonsingolare, però non riguardano più gli $H^i(X,\Theta_X)$, bensì i funtori T^i di Lichtenbaum e Schlesinger, che coincidono con i primi gruppi di coomologia di Quillen del complesso cotangente, ovvero
$T^i(B/A,M) := D^i(B,M)\ (=H^i(\mathrm{Hom}_{A,B}(L_{B/A},M))$ per $i=0,1,2$ (B è una A-algebra).
Mi limito a enunciare i risultati, che vengono dimostrati alle pagine 37 e 78-81 di [H]:

1) Sia B_0 una K-algebra, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo di deformazioni del primo ordine di B e $T^1(B/K,B)$.

2) Sia B_0 una K-algebra liscia, sia $0\to J\to \tilde{A}\to A\to 0$ un'estensione in $\mathcal{A}$ e sia B una deformazione di B_0 su A. Allora
(i) $\exists\, \delta(B)\in T^2(B_0/K, B_0\otimes_A J)$, detto l'ostruzione ad estendere B ad $\tilde{A}$, tale che $\delta=0 \Leftrightarrow \exists$ un'estensione $\tilde{B}$ di B ad $\tilde{A}$.
(ii) Se $\delta=0$, allora esiste un'azione libera e transitiva di $T^1(B_0/K, B_0\otimes J)$ nelle classi

di isomorfismo delle estensioni di B ed $\tilde{A}$.

3) Sia X uno schema algebrico, sia ξ: $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, K & \to & \mathrm{Spec}\, A \end{array}$ una deformazione di X su $A \in ob\, A$

e $0 \to J \to \tilde{A} \to A \to 0$ un'estensione in A. Allora

(i) Ci sono tre ostruzioni successive all'esistenza di un'estensione $\tilde{\xi}$ di ξ ad $\tilde{A}$, esse giacciono, nell'ordine, in $H^0(X, \mathcal{T}^2_X \otimes J)$, $H^1(X, \mathcal{T}^1_X \otimes J)$ e $H^2(X, \mathcal{T}^0_X \otimes J)$ dove

ogni $\mathcal{T}^i_X = \mathcal{T}^i(X, \mathcal{O}_X)$ è un fascio definito localmente dal funtore T^i.

~~(ii) Se $Def(X/A, \tilde{A})$ è l'insieme di tali estensioni a meno di isomorfismo, allora esso è un gruppo e c'è una successione esatta $0 \to H^1(X, \mathcal{T}^0_X \otimes J) \to Def(X/A, \tilde{A}) \to H^0(X, \mathcal{T}^1_X \otimes J) \to H^2(X, \mathcal{T}^0_X \otimes J)$~~

Funtori di anelli artiniani

Def. Un funtore di anelli artiniani è un funtore covariante $F: A_\Lambda \to Set$.
Sia $\xi_0 \in F(K)$. Una deformazione infinitesimale di ξ_0 su $A \in ob(A_\Lambda)$ è un elemento $\xi \in F(A)$ tale che $F(f)(\xi) = \xi_0$ dove $f: A \to K = A/m_A$ è la proiezione.

Se $A = K[\varepsilon]$, ξ si dice una deformazione del primo ordine.

Esempio Sia X uno schema algebrico allora il funtore dei moduli locali,

$Def_X: A \to Set$ definito $\overset{\text{sugli oggetti}}{\text{come}}$ $Def_X(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo delle} \\ \text{deformazioni di } X \text{ su } A \end{array} \right\}$ e

sui morfismi come $Def_X(f: A \to A'): Def_X(A) \to Def_X(A')$

$$\left[\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, K & \to & \mathrm{Spec}\, A \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, K & \to & \mathrm{Spec}\, A' \end{array}\right]$$

è un funtore di anelli artiniani. $Def_X(K) = \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, K & \to & \mathrm{Spec}\, K \end{array} \right\}$ e le deformazioni coincidono

con le solite deformazioni modulo isomorfismo

Anche il suo sottofuntore $\mathrm{Def}'_X : \mathcal{A} \to Set$

$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo di deformazioni} \\ \text{localmente banali di } X \text{ su } A \end{array} \right\}$

è un funtore di anelli artiniani.

Def. Un funtore di anelli artiniani si dice proriappresentabile se è isomorfo ad un funtore del tipo $h_{R/\Lambda}(-) := \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}_\Lambda}(R, -)$ per un $R \in ob(\hat{\mathcal{A}}_\Lambda)$.
(La definizione ha senso perché gli anelli artiniani locali sono completi)

Oss. Un funtore di anelli artiniani F proriappresentabile gode delle seguenti proprietà:

H_0) $F(K)$ consiste di un solo elemento (ovvio)

H_ℓ) Sia $\begin{array}{ccc} A' & & A'' \\ & \searrow \; \swarrow & \\ & A & \end{array}$ un diagramma in $\mathcal{A}_\Lambda$, si considerino le mappe naturali

$\alpha : F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$ indotte da
$$\begin{tikzcd} F(A' \times_A A'') \arrow[r] \arrow[d] & F(A'') \arrow[d] \\ F(A') \arrow[r] & F(A) \end{tikzcd}$$
;

α è biettiva ~~per ogni diagr~~ (anche questo è chiaro)

H_f) $F(K[\varepsilon])$ ha una struttura di K-spazio vettoriale di dimensione finita:

$F(K[\varepsilon]) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}_\Lambda}(R, K[\varepsilon]) = \mathrm{Der}_\Lambda(R, K) = \mathrm{Hom}(\Omega_{R/\Lambda}, K)$.

D'ora in avanti tutti i funtori di anelli artiniani considerati verificano H_0

Def. Lo spazio tangente del funtore F è $t_F := F(K[\varepsilon])$.

Oss. Se F verifica la proprietà

H_ε): $\alpha : F(A \times_K K[\varepsilon]) \to F(A) \times F(K[\varepsilon])$ è biettiva $\forall A \in ob\, \mathcal{A}_\Lambda$

allora t_F è un K-spazio vettoriale:

La somma è data da $F(K[\varepsilon]) \times F(K[\varepsilon]) \xrightarrow{\alpha^{-1}} F(K[\varepsilon] \times_K K[\varepsilon]) \xrightarrow{F(+)} F(K[\varepsilon])$ dove

(α^{-1} esiste perché vale H_ε)

$+ : K[\varepsilon] \times_K K[\varepsilon] \to K[\varepsilon]$

$(a + b\varepsilon, a + b'\varepsilon) \mapsto (a + (b + b')\varepsilon)$

(H_ε serve a verificare l'associatività)

⑦ Lo 0 è l'immagine dell'immersione $F(K) \to F(K[\varepsilon])$

La moltiplicazione per uno scalare $c \in K$ è indotta da $K[\varepsilon] \to K[\varepsilon]$
$a + b\varepsilon \longmapsto a + cb\varepsilon$.

<u>Def.</u> Il differenziale df di una trasformazione naturale di funtori $f: F \to G$ è la mappa indotta $t_F \to t_G$.

<u>Oss.</u> Ogni funtore di anelli artiniani F si estende a un funtore $\hat{F}: \hat{A}_n \to Set$

ponendo $\hat{F}(R) = \varprojlim F\left(R/_{m_R^{n+1}}\right)$

[N.B. $R/_{m_R^{n+1}}$ è artiniano, segue dalla proposizione 8.6 di [A-M]: Sia A anello noeth. locale e sia m il suo ideale massimale, allora o $m^n \neq m^{n+1}$ $\forall n$

o $m^n = 0$ per qualche n e in tal caso A è artiniano

<u>dim</u> $m^n = m^{n+1}$ per qualche n. Segue da Nakayama, che si applica perché A è noetheriano e quindi ogni ideale è finitamente generato, che $m^n = 0$.
Se p è un ideale primo di A, allora $0 = m^n \subset p \Rightarrow m = p$ (basta prendere i radicali)
$\Rightarrow A$ è artiniano q.e.d.]

e $\hat{F}\left(u: (R, m_R) \to (S, m_S)\right): \hat{F}(R) \to \hat{F}(S)$ è la mappa indotta da $F\left(R/_{m_R^n}\right) \to F\left(S/_{m_S^n}\right)$

$\forall n \geq 1$.

<u>Def.</u> Un elemento $\hat{u} \in \hat{F}(R)$ si dice un elemento formale di F e $(R, \hat{u})$ si dice una coppia formale di F.

$\hat{u}$ si può vedere come un sistema $\left\{u_n \in F\left(R/_{m_R^{n+1}}\right)\right\}_{n \geq 0}$ t.c. $\forall n \geq 1$ u_n sia mappato in u_{n-1} dalla funzione $F\left(R/_{m_R^{n+1}}\right) \to F\left(R/_{m_R^n}\right)$ indotta dalla proiezione $R/_{m_R^{n+1}} \to R/_{m_R^n}$

$\hat{u}$ vien detto anche una deformazione formale di $u_0 \in F\left(R/_{m_R}\right) = F(K)$.

Lemma 2

Sia $R \in ob(\hat{A}_\Lambda)$. C'è una corrispondenza biunivoca tra $\hat{F}(R)$ e l'insieme delle trasformazioni naturali $h_{R/\Lambda} \to F$.

dim. Sia $\hat{u} \in \hat{F}(R)$.

Ogni $u_n \in F(R/m_R^{n+1})$ definisce una trasformazione naturale $h_{(R/m_R^{n+1})/\Lambda} \to F$:

$$\begin{array}{rcl} h_{(R/m_R^{n+1})/\Lambda}(A) & \longrightarrow & F(A) \\ f & \longmapsto & F(f)(u_n) \end{array}$$

Dalle condizioni di compatibilità del sistema $\{u_n\}_n$ segue che $\forall n$

$$\begin{tikzcd} h_{(R/m_R^{n})/\Lambda} \arrow[r] \arrow[dr] & h_{(R/m_R^{n+1})/\Lambda} \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}$$

commuta.

Dato che $\forall A \in ob(A_\Lambda)$ $h_{(R/m^n)/\Lambda}(A) \to h_{(R/m_R^{n+1})/\Lambda}(A)$ è biettiva $\forall n \geq h$, dove $h = \min\{l \mid m_A^l = (0)\}$, è possibile definire $h_{R/\Lambda}(A) \to F(A)$ come $h_{(R/m^h)/\Lambda}(A) \to F(A)$.

Viceversa sia $h_{R/\Lambda} \to F$ una trasformazione naturale.

Sia $u_n \in F(R/m_R^{n+1})$ l'immagine della proiezione $R \to R/m_R^{n+1}$ tramite $h_{R/\Lambda}(R/m_R^{n+1}) \to F(R/m_R^{n+1})$ $\forall n$. È chiaro che il sistema $\{u_n\}$ definisce un elemento $\hat{u} \in \hat{F}(R)$.

q.e.d.

Oss. Se la trasformazione naturale indotta da $\hat{u} \in \hat{F}(R)$ è un isomorfismo di funtori, allora F è prorappresentabile, in tal caso $\hat{u}$ si dice un elemento formale universale di F e $(R, \hat{u})$ si dice una coppia formale universale di F.

Def. Sia $f: F \to G$ una trasformazione naturale di funtori di anelli artiniani. f si dice liscia, o fortemente suriettiva, se $\forall \mu: B \to A$ epimorfismo in A_Λ la mappa $F(B) \to F(A) \times_{G(A)} G(B)$, indotta da

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r] \arrow[d, "F(\mu)"'] & G(B) \arrow[d, "G(\mu)"] \\ F(A) \arrow[r] & G(A) \end{tikzcd}$$

, è suriettiva.

② **Oss.** Si può dimostrare che è sufficiente verificare tale proprietà per $B \to A$ estensioni piccole in $\mathcal{A}_\Lambda$ (cfr. nel caso $\Lambda = K$, ovvero $\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{A}$, [F] corollario 1.17)

Def. Un funtore di anelli artiniani F si dice liscio se $F(\mu): F(B) \to F(A)$ è suriettivo per ogni epimorfismo $B \to A$.

Oss. (1) Se $f: F \to G$ è liscio, allora, dato che sia F che G verificano H_0, $f: F(A) \to G(A)$ è suriettivo $\forall A \in Ob(\mathcal{A}_\Lambda)$ e in particolare il differenziale df è suriettivo.
(2) Se $f: F \to G$ è liscio, allora F è liscio se e solo se G è liscio.

dim. Sia $\mu: B \to A$ epimorfismo in $\mathcal{A}_\Lambda$.

Si consideri

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r] \arrow[dr, "F(\mu)"'] & F(A) \times_{G(A)} G(B) \arrow[r] \arrow[d] & G(B) \arrow[d, "G(\mu)"] \\ & F(A) \arrow[r, "f(A)"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

Sia G liscio. Sia $\xi \in F(A)$, allora $\exists\, \eta \in G(B)$ t.c. $G(\mu)(\eta) = f(A)(\xi)$, pertanto $\exists\, \zeta \in F(B)$ t.c. $\zeta \to (\xi, \eta) \in F(A) \times_{G(A)} G(B)$ (f liscio) $\Rightarrow F(\mu)(\zeta) = \xi \Rightarrow F$ liscio.

Viceversa sia F liscio. Sia $\eta \in G(A)$. f liscio $\Rightarrow \exists\, \xi \in F(A)$ t.c. $\eta = f(A)(\xi)$,
F liscio $\Rightarrow \exists\, \zeta \in F(B)$ t.c. $\xi = F(\mu)(\zeta)$. Sia $\eta' \in G(B)$ t.c. $\zeta \longrightarrow (\xi, \eta') \in F(A) \times_{G(A)} G(B)$
allora $G(\mu)(\eta') = f(A)(\xi) = \eta \Rightarrow G$ liscio

q.e.d.

Def. Sia F un funtore di anelli artiniani. Un elemento formale $\hat{u} \in \hat{F}(R)$ per un qualche $R \in Ob(\hat{\mathcal{A}}_\Lambda)$ si dice versale se la trasformazione naturale che definisce $h_{R/\Lambda} \to F$ è liscia, se inoltre il differenziale $d\hat{u}: t_{h_{R/\Lambda}} \to t_F$ è biettivo $\hat{u}$ si dice semiuniversale (o miniversale). In questi casi $(\hat{u}, R)$ si dice, rispettivamente, una coppia formale versale o una coppia formale semiuniversale.

Oss. Sia $(R, \hat{u})$ una coppia formale per F, e sia $\mu: B \to A$ un epimorfismo in $\mathcal{A}_\Lambda$, siano $\xi_B \in F(B)$ e $\xi_A \in F(A)$ tali che $F(\mu)(\xi_B) = \xi_A$ e sia $\varphi: R \to A$ t.c. $\hat{F}(\varphi)(\hat{u}) = \xi_A$.
$\hat{u}$ è versale se esiste un sollevamento $\psi: R \to B$ di φ tale che $\hat{F}(\psi)(\hat{u}) = \xi_B$,

ovvero se sono commutativi

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\mu"] \\ R \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\psi"'] & A \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} & \xi_B \arrow[d] \\ \hat{u} \arrow[ur] \arrow[r] & \xi_A \end{tikzcd}$$

$\hat{u}$ è universale se il sollevamento è unico; $\hat{u}$ è semiuniversale se è versale e il sollevamento è unico quando $B = K(\varepsilon)$ e $A = K$.

Def Un morfismo di coppie formali per F, $\bar{f}: (R, \hat{u}) \to (S, \hat{v})$ è un morfismo $f: R \to S$ in $\hat{A}_\Lambda$ t.c. $\hat{F}(f)(\hat{u}) = \hat{v}$. $\bar{f}$ è un isomorfismo se lo è f

Prop. 2 Sia F un funtore di anelli artiniani:

(i) Una coppia universale formale $(R, \hat{u})$ per F è unica a meno di isomorfismo unico (di coppie formali).

(ii) Due coppie formali semiuniversali $(R, \hat{u})$ e $(S, \hat{v})$ per F sono isomorfe, ma non necessariamente in modo unico, però l'isomorfismo indotto a livello di spazi tangenti $t_{S/\Lambda}$ e $t_{R/\Lambda}$ è unico.

dim. (cenni) (i) È facile: Sia $(S, \hat{v})$ un'altra coppia formale universale

$\forall n \geq 1 \ \exists! f_n \in h_{R/\Lambda}(S/m_S^{n+1})$ t.c. $f_n \mapsto v_n \in F(S/m_S^{n+1})$ tramite l'isomorfismo associato a $\hat{u}$ e $f = \varprojlim f_n : (R, \hat{u}) \to (S, \hat{v})$ è univocamente determinato.

Allo stesso modo si definisce $g: (S, \hat{v}) \to (R, \hat{u})$ ed è immediato verificare che f e g sono l'uno l'inverso dell'altro.

(ii) Come in (i) si possono costruire

$f: (R, \hat{u}) \to (S, \hat{v})$ e $g: (S, \hat{v}) \to (R, \hat{u})$ (non necessariamente unici)

Si ottiene il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} t_{R/\Lambda} \arrow[d, shift right, "df"'] \arrow[dr, "d\hat{u}"] & \\ t_{S/\Lambda} \arrow[u, shift right, "dg"'] \arrow[r, "d\hat{v}"'] & t_F \end{tikzcd}$$

quindi $df = (d\hat{v})^{-1} d\hat{u}$ e $dg = (d\hat{u})^{-1} d\hat{v}$ e sono univocamente determinati e l'uno l'inverso dell'altro. Si mostra che ciò implica che f e g sono isomorfismi l'uno l'inverso dell'altro.

q.e.d.

(11) **Teorema di Schlessinger**

Sia $F: \mathcal{A}_\Lambda \to Set$ un funtore di anelli artiniani che soddisfa H_0.
Siano $A' \to A$ e $A'' \to A$ morfismi in $\mathcal{A}_\Lambda$ e sia $\alpha: F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$

la mappa naturale indotta da

$$\begin{array}{ccc} F(A' \times_A A'') & \longrightarrow & F(A'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A') & \longrightarrow & F(A) \end{array}$$

Allora

i) F ha un elemento formale semiuniversale se e solo se soddisfa

$\overline{H})$: se $A'' \to A$ è un'estensione piccola, α è suriettiva

$H_\varepsilon)$ se $A'' = K[\varepsilon]$ e $A = K$, allora α è biettiva

$H_f)$ $\dim_K(t_F) < \infty$

ii) F ha un elemento formale universale se e solo inoltre soddisfa

$H)$ la mappa naturale $F(A' \times_A A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$ è biettiva per ogni estensione piccola $A' \to A$ in $\mathcal{A}_\Lambda$

Oss. H e $\overline{H}$ si possono interpretare in termini di un'azione di t_F:
sia $0 \to (t) \to A' \xrightarrow{\mu} A \to 0$ un'estensione piccola in $\mathcal{A}_\Lambda$ e si supponga che F verifichi H_0 e H_ε, dunque t_F è un K-spazio vettoriale.
Si può definire un'azione di t_F su $F(A')$:
$z: t_F \times F(A') \xrightarrow{\alpha^{-1}} F(K[\varepsilon] \times_K A') \xrightarrow{F(b)} F(A')$
dove α^{-1} esiste perché vale H_ε e $F(b)$ è indotto da $b: K[\varepsilon] \times_K A' \to A'$

$(x + y\varepsilon, a') \to a' + yt$

È chiaro che le fibre di $F(\mu)$ sono chiuse rispetto all'azione z.
L'isomorfismo $\gamma: K[\varepsilon] \times_K A' \longrightarrow A' \times_A A'$

$(x + y\varepsilon, a') \longmapsto (a' + yt, a')$

induce una mappa

$\beta: t_P \times F(A') \xrightarrow{\alpha^{-1}} F(K[\varepsilon] \times_K F(A')) \xrightarrow{F(\eta)'} F(A' \times_A A') \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A')$ che

coincide con $t_P \times F(A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$

$(v, \xi) \longmapsto (\tau(v,\xi), \xi)$

In generale β non è iniettiva (ovvero τ non è libera sulle fibre di $F(\mu)$) né suriettiva (ovvero τ non è transitiva sulle fibre di $F(\mu)$).

Però è chiaro che β è suriettiva (rispettivamente iniettiva) ~~se~~ se e solo se $F(A' \times_A A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$ è suriettiva (risp. iniettiva).

Quindi vale H se e solo τ è transitiva sulle fibre di $F(\mu)$ per ogni estensione piccola $\mu: A' \to A$ in t_A;

vale H se e solo τ è libera e transitiva sulle fibre di $F(\mu)$ per ogni estensione piccola $\mu: A' \to A$ in t_A.

Per completezza inserisco le definizioni di spazi di ostruzioni per funtori di anelli artiniani e per le loro trasformazioni naturali.

<u>Def.</u> Sia F un funtore di anelli artiniani che verifica H_0 e H_ε. Uno spazio di ostruzioni $v(F)$ per F è un K-spazio vettoriale tale che per ogni $A \in Ob(t_A)$ e per ogni $\xi \in F(A)$ esiste una mappa K-lineare $\xi_v: Ex_A(A, K) \to v(F)$ tale che $Ker(\xi_v)$ consiste delle classi di isomorfismo di estensioni $(\tilde{A}, \varphi)$ tali che $\xi \in Im(F(\varphi): F(\tilde{A}) \to F(A))$.

Se (0) è uno spazio di ostruzioni per F, F si dice non ostruito.

Sia $f: F \to G$ una trasformazione naturale di funtori di anelli artiniani (qualunque). Due spazi vettoriali T^1 e T^2 sono lo spazio tangente e uno spazio di ostruzioni per f se per ogni estensione semipiccola $0 \to I \to \tilde{A} \to A \to 0$ esiste una successione esatta di gruppi e insiemi

$0 \to T^1 \otimes I \to F(\tilde{A}) \to F(A) \times_{G(A)} G(\tilde{A}) \to T^2 \otimes I$

(ovvero $T^1 \otimes I$ agisce liberamente su $F(\tilde{A})$, elementi di $F(\tilde{A})$ hanno la stessa immagine se solo se sono nello stesso orbita dell'azione di $T^1 \otimes I$ e un elemento di $F(A) \times_{G(A)} G(\tilde{A})$ vien mappato in 0 se e solo viene da un elemento di $F(\tilde{A})$), che sia funtoriale, ovvero se $0 \to I_1 \to \tilde{A}_1 \to A_1 \to 0$ è un'altra extension semipiccola e ci sono morfismi

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & \tilde{A} & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I_1 & \to & \tilde{A}_1 & \to & A_1 & \to & 0 \end{array}$$

allora

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T^1 \otimes I & \to & F(\tilde{A}) & \to & F(A) \times_{G(A)} G(\tilde{A}) & \to & T^2 \otimes I \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & T^1 \otimes I_1 & \to & F(\tilde{A}_1) & \to & F(A_1) \times_{G(A_1)} G(\tilde{A}_1) & \to & T^2 \otimes I_1 \end{array}$$

commuta.

<u>Teorema</u>

Sia X uno schema algebrico.

Def_X soddisfa le condizioni $H_0, \bar{H}$ e H_ε. quindi per dimostrare l'esistenza di un elemento semiuniversale basta provare che $Def_X(K[\varepsilon])$ è un K-spazio vettoriale di dimensione finita.

<u>dim.</u> H_0 è evidente.

<u>Caso affine</u> Sia $X = \operatorname{Spec}(B)$

$\bar{H}$: Siano $A' \to A$ un morfismo in $\mathcal{A}$ e $A'' \to A$ un'estensione piccola in $\mathcal{A}$.

Sia $\bar{A} = A' \times_A A''$

è evidente che il diagramma

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (t) & \to & \bar{A} & \to & A' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & (t) & \to & A'' & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

commuta e le righe sono esatte.

Un elemento di $Def_X(A') \times_{Def_X(A)} Def_X(A'')$ è rappresentato da due deformazioni di B_0 $f': A' \to B'$ e $f'': A'' \to B''$ tali che $A \to B' \otimes_{A'} A$ e $A \to B'' \otimes_{A''} A$ sono deformazioni isomorfe di B_0 su A.

Quindi ci sono A-isomorfismi $B' \otimes_{A'} A \cong B'' \otimes_{A''} A \cong B$ dove $A \to B$ è una deformazione di B_0 su A.

Per dimostrare che vale $\bar{H}$, bisogna trovare una deformazione $\bar{f}$ di B_0 su $\bar{A}$ che induca la coppia (f', f'').

Sia $\bar{B} = B' \otimes_B B''$ e sia $\bar{f}: \bar{A} \to \bar{B}$ l'omomorfismo naturale.

È chiaro che $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} A'$ è A'-isomorfo a B' e $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} A''$ è A''-isomorfo a B''.

Quindi basta dimostrare che $\bar{f}$ è piatto.

Per farlo tensorizziamo il diagramma $(*)$ con $\otimes_{\bar{A}} \bar{B}$, si ottiene:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & (t) \otimes_{\bar{A}} \bar{B} & \to & \bar{B} & \to & B' & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B_0 & \to & B'' & \to & B & \to & 0
\end{array} \qquad (**)$$

dove la freccia inferiore è così per il seguente lemma:

<u>Lemma 3</u> Sia $0 \to (t) \to A' \to A \to 0$ un'estensione piccola in A e sia $g: A' \to R$ un omomorfismo di K-algebre. Sia $R_0 = R \otimes_A K$.

g è piatto se e solo se $\mathrm{Ker}(R \to R \otimes_{A'} A) \cong R_0$ e l'omomorfismo indotto $\tilde{g}: A \to R \otimes_{A'} A$ è piatto.

(Nel nostro caso $A = A$, $A' = A''$, $g: A' \to R$ $=$ $f'': A' \to \overset{\text{piatto}}{B''}$ e $R_0 = B_0$)

dim. Sia g piatto, è ovvio che $\tilde{g}$ è piatto. Inoltre $R \otimes_{A'} (t) \cong R \otimes_{A'} K = R_0$

Tensorizzando $0 \to (t) \to A' \to A \to 0$ per R si ottiene

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Tor}_1^{A'}(R, A)} \to \underset{\substack{\wr\| \\ R_0}}{R \otimes_{A'} (t)} \to R \to R \otimes_{A'} A \to 0$$

g piatto $\to$

viceversa si può considerare la $\overset{\text{fissa}}{\vee}$ successione esatta ottenendo che $\mathrm{Tor}_1^{A'}(R, A) = 0$ dato che $R_0 \cong \mathrm{Ker}(R \to R \otimes_{A'} A)$ per ipotesi.

se $A=K$ $\quad \mathrm{Tor}_1^{A'}(R,A)=0 \Rightarrow R$ piatto

$A\neq K$ allora da $0\to m_A\to A\to K\to 0$ si ottiene

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Tor}_1^{A'}(R,A) & \to & \mathrm{Tor}_1^{A'}(R,K) & \xrightarrow{\partial} & R\otimes_{A'} m_A & \to & \underbrace{R\otimes_{A'} A}_{=R_A} & \to & R\otimes_{A'} K \to 0 \\
\parallel & & & & \parallel & & & & \parallel \\
0 & & & & R\otimes_{A'} A\otimes_A m_A & & & & R\otimes_{A'} A\otimes_A K \\
 & & & & \parallel & & & & \parallel \\
 & & & & R_A\otimes_A m_A & & & & R_A\otimes_A K
\end{array}$$

ma R_A è piatto per ipotesi su A $\Rightarrow$ $0\to R_A\otimes_A m_A\to R_A\to R_A\otimes_A K\to 0$ è esatta

$\Rightarrow \partial=0 \Rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A'}(R,K)=0 \Rightarrow R$ piatto.

q.e.d. ⌟

Dal diagramma (**) segue che anche $(t)\otimes_{\bar A}\bar B\to\bar B$ è iniettivo e quindi si può applicare di nuovo il lemma (stavolta $A'=\bar A$, $A=A'$, $g: A'\to R$, $\bar f:\bar A\to\bar B$, $R_0=\bar B\otimes_{\bar A} X=\bar B\otimes_{\bar A}(t)$, $\tilde g$: $f': A'\to B'=\bar B\otimes_{\bar A} A'$) per concludere che $\bar f$ è piatto.

H_ε: $A''=K[\varepsilon]$ e $A=K$. Sia $\tilde f:\bar A\to\tilde B$ una deformazione tale che $\alpha(\tilde f)=(f',f'')$

allora
$$\begin{array}{ccc}
\tilde B & \to & \tilde B\otimes_{\bar A} A''\cong B'' \\
\downarrow & & \downarrow \\
B'\cong \tilde B\otimes_{\bar A} A' & \to & B_0
\end{array}$$
commuta, quindi per la proprietà universale del prodotto fibrato $\exists g:\tilde B\to\bar B$ che è un isomorfismo di deformazioni;

Pertanto $\alpha: \mathrm{Def}_X(A'\times_K K[\varepsilon]) \to \mathrm{Def}_X(A')\times \mathrm{Def}_X(K[\varepsilon])$ è biettiva.

<u>X arbitrario</u>

H_3 Sia $A'\to A$ morfismo in $\mathcal{A}$ e sia $A''\to A$ un'estensione piccola in $\mathcal{A}$.

Come prima sia $\bar A=A'\times_A A''$

Sia $([X'],[X''])\in \mathrm{Def}_X(A')\times_{\mathrm{Def}_X(A)}\mathrm{Def}_X(A'')$, ciò vuol dire che abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] & & X'' \arrow[d] \\ & X \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "f''"] \arrow[d] & \\ \operatorname{Spec} A' & \operatorname{Spec} A \arrow[l] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A'' \end{tikzcd}$$

e f', f'' inducono rispettivamente $X' \times_{\operatorname{Spec} A'} \operatorname{Spec} A \cong X$ e

$X'' \times_{\operatorname{Spec} A''} \operatorname{Spec} A \cong X$.

Si consideri il fascio di A-algebre $\mathcal{O}_{X'} \times_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X''}$ su X.

$\bar{X} := (|X|, \mathcal{O}_{X'} \times_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X''})$ è uno schema su $\operatorname{Spec} \bar{A}$

(localmente è uno schema affine per il caso precedente, gli incollamenti funzionano perché $\mathcal{O}_{X'} \times_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X''}$ è già un fascio).

~~Dunque~~ Dal caso affine segue che $\bar{X}$ è piatto su $\operatorname{Spec}(\bar{A})$.

Perciò $\bar{X}$ è una deformazione di X su $\bar{A}$ che induce $([X'], [X''])$

e pertanto vale $\bar{H}$.

H_ε) Nel caso in cui $A'' = K(\varepsilon)$, $A = K$, il diagramma precedente

è semplicemente $X' \xleftarrow{f'} X \xrightarrow{f''} X''$.

Quindi ogni $\tilde{X}$ $\operatorname{Spec}(\bar{A})$-schema che induce $([X'], [X''])$ in

$\operatorname{Def}_X(A') \times \operatorname{Def}_X(K(\varepsilon))$ è tale che gli isomorfismi $\tilde{X} \times_{\operatorname{Spec}(\bar{A})} \operatorname{Spec}(A') \cong X'$

e $\tilde{X} \times_{\operatorname{Spec}(\bar{A})} \operatorname{Spec}(K(\varepsilon)) \cong X''$ inducono l'identità su $X = \tilde{X} \times_{\operatorname{Spec}(\bar{A})} \operatorname{Spec} K$

(17) Quindi abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & \bar{X} & \\ X' \arrow[ur] & & X'' \arrow[ul] \\ & X \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd}$$

e dalla proprietà universale di $\bar{X}$ segue che esiste un morfismo, che risulta essere un isomorfismo, $\bar{X} \to \hat{\bar{X}}$.

q.e.d.

Oss. Un elemento formale Def_X è una deformazione in termini di schemi formali, quindi anche una volta trovato un elemento semiuniversale resta il problema dell'algebrizzazione ovvero bisogna capire se tale schema formale è il completamento di uno schema algebrico oppure no (cfr. paragrafo 2.5 [S]).

Bibliografia

[A-M]: Atiyah-Macdonald, "Introduction to commutative algebra"
[F]: Fantechi, "Elementary deformation theory"
[H]: Hartshorne, "Deformation Theory"
[S]: Sernesi, "Deformations of algebraic schemes"
Sernesi, "An overview of classical deformation theory"