

# INSIEMI SIMPLICIALI, OMOTOPIA e CATEGORIE SUPERIORI

## §-1 RICHIAMI

PARTE SECONDA

## §0 INTRODUZIONE

MOTIVAZIONI Abbiamo visto che se  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  è un funtore semi-esatto (= esatto solo a destra / solo a sinistra) si può derivare  $F$  e  $RF / LF: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ . La ricetta è:

- $\mathcal{A} \hookrightarrow Ch(\mathcal{A})$  immergiamo  $\mathcal{A}$  nella categoria abeliana dei complessi
  - $\forall X \in \mathcal{A} \exists Y' \in Ch(\mathcal{A})$  t.q.  $Y'$  è "buono" (= iniettivo, proiettivo, esatto, etc...)
- e  $Y' \xrightarrow{\alpha} X \left( / X \xrightarrow{\beta} Y' \right)$  è più

Allora  $RF(X) := F(RX) \quad / \quad LF(X) := F(LX)$

Cosa succede quando  $\mathcal{A}$  non è più una categoria abeliana?  
 Non tutto è perduto = D. Quillen ha pensato di usare

- $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathcal{B}$  oggetti simpliciali in  $\mathcal{A}$
  - una "struttura modello" su  $\mathcal{S}\mathcal{B}$  che permette di rimpiazzare  $X \in \mathcal{A}$  con  $Y' \in \mathcal{S}\mathcal{B}$  omotopicamente più semplice e "quasi-isomorfo" (= debolmente equivalente) a  $X$ .
- }  $\Rightarrow$  Funtori derivati (1968)

## OMOTOPICAMENTE BUONO ???

Per esempio  $\mathcal{A} = Top$  non è abeliana, ma ci interessano costruzioni a meno di omotopia. Si parte da:

Teorema (Whitehead)  $\forall X, Y$  CW complessi (connessi). Se  $f: X \rightarrow Y$  continua induce  $f_* = \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y)$  iso  $\forall n$  (e  $\forall$  base)  $\Rightarrow f$  è un'equivalenza omotopica



Proposizione (Approssimazione CW)  $\forall X \in \text{Top} \exists Z \subset \mathbb{C}W$  complesso, tale  $\exists f: Z \rightarrow W$   
 tale  $f_x$  è iso s.s.,  $\pi_n \simeq \tau_n$  (si dice che è una equivalenza omotopica  
debole) (Set 13)

Quindi se ci interessa l'omotopia possiamo ~~risparmiare~~ lavorare con i CW.

## §1 CATEGORIE MODELLO: DEFINIZIONI

Ref: Hovey "Model Categories"  
 Dwyer-Spalinski

Def Una struttura modello su una categoria  $\mathcal{C}$  è il dato di tre  
 sottocategorie di morfismi

$W =$  epimorfismi deboli,  $\text{CoF} =$  cofibrazioni,  $\text{FiB} =$  fibrazioni

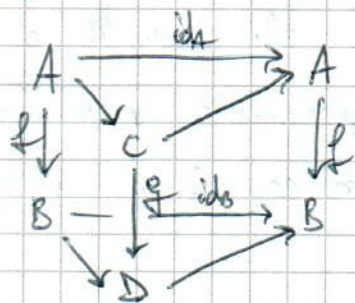
e di fattorizzazioni funtoriali

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \text{Mor } \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^1 \leftarrow \text{categoria dei morfismi in } \mathcal{C} \\ (\gamma, \delta) &= \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^1 \end{aligned}$$

tali che:

[due-su-tre] se  $f, g$  sono morfismi in  $\mathcal{C}$  componibili come  $g \circ f$ ,  
 se due di  $f, g, g \circ f$  sono in  $W$  lo è anche il terzo

[retro] Dato ogni diagramma di retroazione



se  $g$  è in  $W$  o in  $\text{FiB}$  o in  $\text{CoF}$   
 $\Rightarrow f$  è anche in  $W$

[fattorizzazione] Ogni  $f \in \mathcal{C}^1$  è fattorizzato come

$$f = \beta(f) \circ \alpha(f)$$

$$\alpha(f) \in \text{CoF} \quad \beta(f) \in W \cap \text{FiB}$$

$$f = \delta(f) \circ \gamma(f)$$

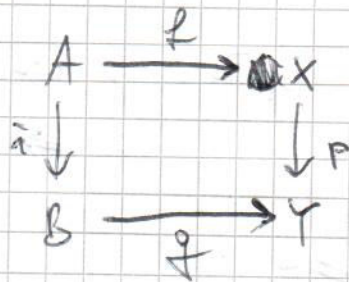
$$\gamma(f) \in W \cap \text{CoF} \quad \delta(f) \in \text{FiB}$$

fibrazioni triviali  
 cofibrazioni triviali



[sollevamento] Ogni diagramma commutativo

(set 14)



in cui  $i \in \text{Cof}$ ,  $p \in \text{Fib}$  e una delle due è anche in  $W$ , ammette un sollevamento  $h: B \rightarrow X$   $ph = g, hi = f$

si dice che le cofibrazioni (resp. le cofibrazioni triviali) hanno la proprietà di sollevamento e sinistra rispetto alle fibrazioni triviali (resp. fibrazioni),

$$\text{Cof} \subseteq \text{LLP}(W, \text{Fib}) \quad W, \text{Cof} \subseteq \text{LLP}(\text{Fib})$$

e l'analogo duale  $\text{Fib} \subseteq \text{RLP}(W, \text{Cof}) \quad W, \text{Fib} \subseteq \text{RLP}(\text{Cof})$

Def Una categoria modello (chiusa) è una categoria  $\mathcal{C}$  completa e cocompleta, dotata di una struttura modello  $(W, \text{Fib}, \text{Cof}, (\perp), \top)$

Ex  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ ,  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ,  $\text{Ch}(R)$  definendo  $\text{Fib} = \text{RLP}(W, \text{Cof})$  stella settimane scorsa  
 Tracce basate da matrici

Rule In particolare se  $\mathcal{C}$  è una categoria modello  $\mathcal{F}$

$0 := \lim_{\rightarrow} \phi$  oggetto iniziale

$1 := \lim_{\leftarrow} \phi$  oggetto finale, diciamo che

$A \in \mathcal{C}$  è cofibrante se  $(0 \rightarrow A) \in \text{Cof}$   
fibrante se  $(A \rightarrow 1) \in \text{Fib}$ .

Dalle proprietà delle fattorizzazioni otteniamo

$$(0 \rightarrow A) = \left( 0 \xrightarrow{i} QA \xrightarrow{p} A \right)$$

Cof                  W, Fib

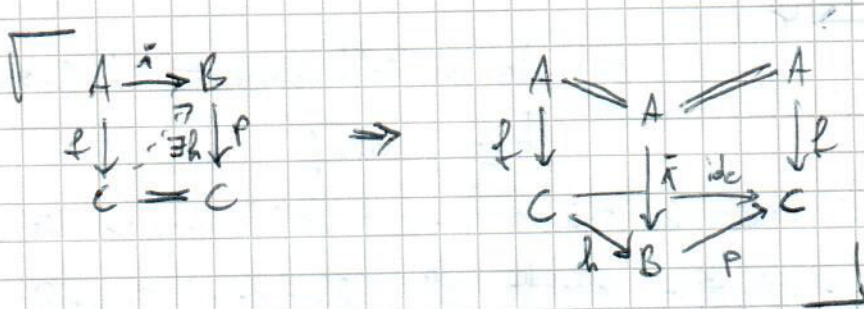
$QA$  è cofibrante e

$Q = A \mapsto QA$  è un funtore



che ammette una trasformazione naturale  $Q \xrightarrow{q} id_C$  - Def 15  
 con componenti in  $W$

Lemma Se  $f = poi$ ,  $f$  ha LLP rispetto a  $p \Rightarrow f$  è retraction di  $i$   
 $f$  ha RLP  $\dots i \Rightarrow \dots \dots \dots p$



Corollario Se  $C$  è una categoria modello siamo sempre nella situazione

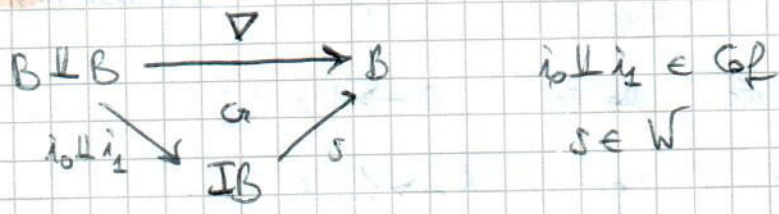
del Lemma  $\Rightarrow$   $Cof = LLP(W_n Fib)$        $W_n Cof = LLP(Fib)$   
 $Fib = RLP(W_n Cof)$        $W_n Fib = RLP(Cof)$

$Is_2(C) \in RLP(C^2) \cap LLP(C^2) \Rightarrow Is_2(C) \subseteq W_n Fib \cap Cof$

Rule  $Cof$  e  $W_n Cof$  sono chiusi rispetto al pushout  
 $Fib$  e  $W_n Fib$   $\dots \dots \dots$  pullback

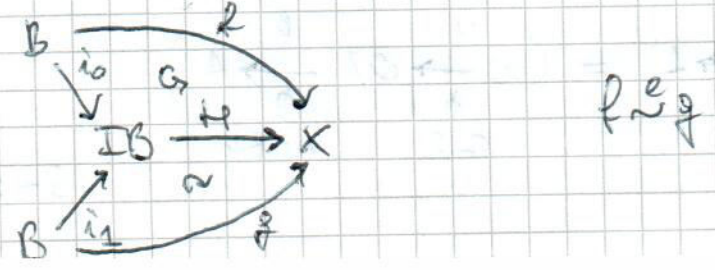
OMOTOPIA

Def  $C$  categoria modello,  $f, g: B \rightarrow X$  in  $C$   
 $\star$  un oggetto cilindro per  $A$  è ~~una~~ una fattorizzazione



$\star$  un'omotopia sinistra tra  $f$  e  $g$  è  $H: IB \rightarrow X$ ,  $IB$  ~~è~~ cilindro

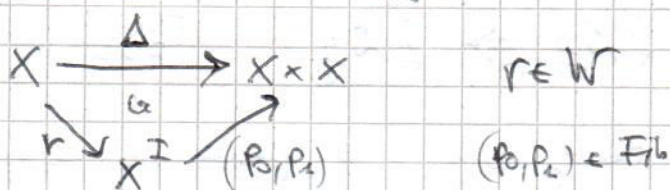
tale che



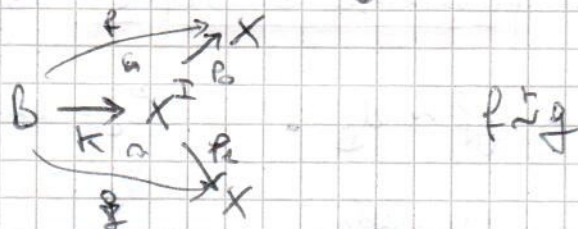


Le nozioni duali sono l'oggetto canonico  $X^I$

(set 16)



e omotopia destra tra  $f$  e  $g$   $k: A \rightarrow X^I$   $t_0$



Rank le fattorizzazioni functoriali ci danno path e cylinder objects "canonici" nel senso che ogni altro path object e' debolmente equivalente al canonico (e lo stesso per i cylinder). -  $(\text{Cylinder})^{\text{op}}$  - path  $\tilde{r}$  e  $\tilde{r}$  non coincidono in generale!

e non sono nemmeno stabili per composizione con altre mappe ( $f \tilde{r} g \not\approx hf \tilde{r} hg$  ne  $f \tilde{r} gh$ )

Proposizione e categorie modello,  $f, g: B \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$

• se  $f \tilde{r} g$  e  $h: X \rightarrow Y \Rightarrow hf \tilde{r} hg$  [+ dual]

$k: A \rightarrow B$  e  $X$  e' fibrante  $\Rightarrow fk \tilde{r} gk$

• se  $B$  e' cofibrante  $\tilde{r}$  e' <sup>relazione</sup> di equivalenza su  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$  [+ dual]

• se  $B$  e' cofibrante,  $h: X \rightarrow Y$  e' in  $W \cap \text{Fib}$  o in  $W$  e  $X, Y$  sono fibranti

$\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) / \tilde{r} \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) / \tilde{r}$  [+ dual]

• se  $B$  e' cofibrante,  $f \tilde{r} g \Rightarrow f \tilde{r} g$  e  $\forall X^I$  path object per  $X$

$\exists$  omotopia destra  $k: B \rightarrow X^I$  da  $f$  a  $g$ . [+ dual]







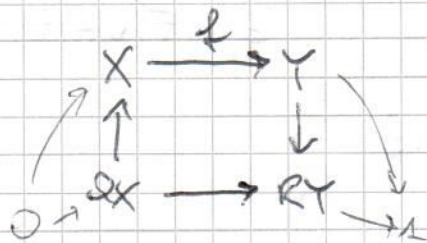
Def  $\mathcal{C}$  categoria modello. La categoria omotopa di  $\mathcal{C}$

(set 48)

è  $\text{Ho}\mathcal{C} := \mathcal{C}[W^{-1}]$

Rule i mappazzamenti cofibranti  $Q$  e fibranti  $R$  dicono che

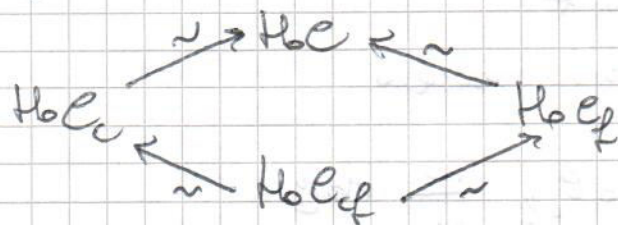
$\forall f: X \rightarrow Y$  in  $\text{Ho}\mathcal{C}$



$f$  è la composizione

$X \leftarrow QX \rightarrow RX \leftarrow Y$  in  $\text{Ho}\mathcal{C}$

Proposizione  $\mathcal{C}$  categoria modello. Le inclusioni indotte equivalente



$\Gamma \text{Ho}\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\text{Ho}Q]{\text{Ho}i} \text{Ho}\mathcal{C}_Q$

$i: W \rightarrow W$  è ben def  $\text{Ho}i: \text{Ho}\mathcal{C}_Q \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$ .

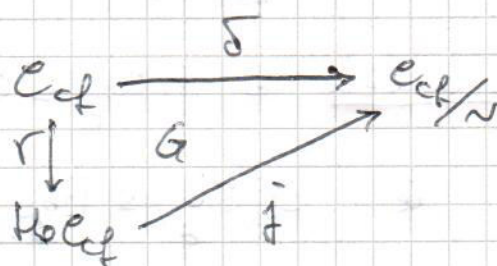
Il quasi-inverso è ~~data~~ <sup>indotto</sup> dal mappazzamento cofibrante  $e \xrightarrow{Q} \mathcal{C}_Q$

e gli isomorfismi naturali  $\text{Ho}Q \cdot \text{Ho}i \rightarrow \text{id}_{\text{Ho}\mathcal{C}_Q}$  e  $\text{Ho}i \cdot \text{Ho}Q \rightarrow \text{id}_{\text{Ho}\mathcal{C}}$

sono indotti da  $q: Q \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$   $\begin{matrix} 0 \rightarrow QX \xrightarrow{q} X \\ \downarrow \end{matrix}$

Corollario  $\mathcal{C}$  categoria modello,  $\exists!$  isomorfismo di categorie

$j: \mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}_f$  tale che commuta





Infatti  $\delta$  che soddisfa le proprietà universali della localizzazione: set 1.9

$\delta$  manda  $h \circ p \simeq w \circ p$  in isomorfismo;  $\delta$  ~~se~~  $F: \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{D}$  che manda  $w \circ p$  in iso,

Se  $f \circ g: A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}_{cf} \Rightarrow Ff = Fg$

quindi è ben definito  $\bar{F}: \mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \mathcal{D}$  e  $\bar{F}\delta = F$

$[f] \mapsto Ff$

$\Rightarrow \exists! \text{ iso } \mathcal{C}_{cf} \cong \text{Ho} \mathcal{C}_{cf}$

Riassumendo:

Teorema  $\mathcal{C} = (e, W, F, G)$  categoria modello

$$\mathcal{C}_{cf}/\sim \cong_{\text{iso}} \text{Ho} \mathcal{C}_{cf} \cong_{\text{ep}} \text{Ho} \mathcal{C}$$

$$e \text{ Hom}_{\text{Ho} \mathcal{C}}(RX, RY) \cong \text{Hom}_e(QX, RY)/\sim$$

$\gamma: e \rightarrow \text{Ho} \mathcal{C}$  identifica mappe omotopiche e

$\gamma(f)$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow f \in W$

FUNTORI DERIVATI A' LA QUILLEN

Def  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorie modello.  $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} = \mathcal{G}$  egibuzione  $(F, G)$

$F$  è un funttore sinistro di Quillen se  $F(\text{Cof}) \subseteq \text{Cof}_{\mathcal{D}}$  e  $F(\text{cof}_e W) \subseteq \text{cof}_{\mathcal{D}} W_{\mathcal{D}}$

$G$  è un funttore destro di Quillen se  $G(\text{Fib}_{\mathcal{D}}) \subseteq \text{Fib}_e$  e  $G(W_{\mathcal{D}} \cap \text{Fib}_{\mathcal{D}}) \subseteq W_e \cap \text{Fib}_e$



e  $(F, G, \varphi = \text{Hom}_D(F, -) \simeq \text{Hom}_C(-, G))$  si dice

stet 20

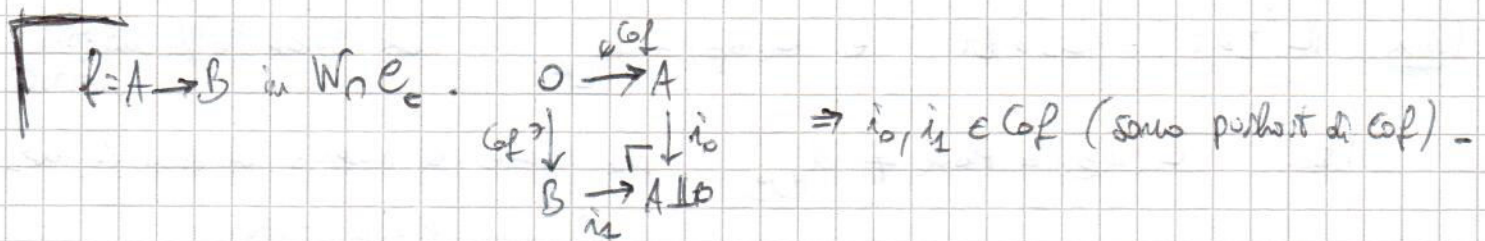
aggiunzione di Quillen se  $F, G$  sono come sopra

Prop  $F$  Quillen sinistro,  $F \dashv G \Rightarrow G$  Quillen destro (e duale)

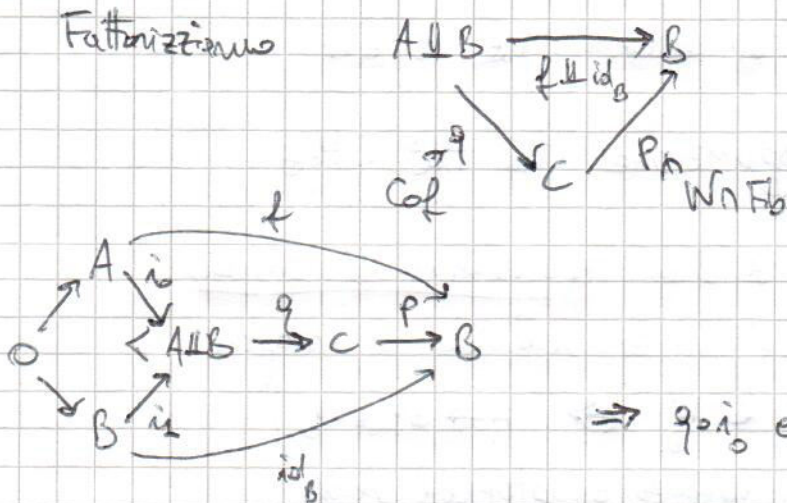
Lemma (K Brown)  $C$  categoria modello,  $D$  categoria con equivalenze deboli  $W$

Sia  $F: C \rightarrow D$  che manda cofibrazioni triviali tra oggetti cofibranti in equivalenze deboli. Allora  $F$  invia eq. deboli tra oggetti cofibranti in equivalenze deboli.

Dualmente se  $F(W \cap \text{Fib}_c \cap \mathcal{E}_f) \subseteq W \Rightarrow F(W \cap \mathcal{E}_f) \subseteq W$



Fattorizziamo



$$f = p \circ (q \circ i_0) \Rightarrow q \circ i_0 \in W$$

$$p \circ (q \circ i_1) = \text{id}_B \Rightarrow q \circ i_1 \in W$$

$\Rightarrow q \circ i_0$  e  $q \circ i_1$  soddisfanno le ipotesi

$$\Rightarrow F(q \circ i_0), F(q \circ i_1) \in W$$

$$F(p) \circ F(q \circ i_1) = F(p \circ q \circ i_1) = F(\text{id}_B) = \text{id}_B \Rightarrow F(p) \in W$$

$$e \quad F(f) = F(p) \circ F(q \circ i_0) \in W$$



Il Lemma di Brown giustifica:

Sheet 24

Def  $F: C \rightarrow D$  Quillen sinistro, definiamo il suo  
functore derivato totale a sinistra  $LF: HoC \rightarrow HoD$   
come la composizione  $HoC \xrightarrow{HoQ} HoC_p \xrightarrow{HoF} HoD$

$G: D \rightarrow C$  Quillen destro, definiamo il suo funtore derivato totale a destra  $RG := HoG \circ HoR = HoC \rightarrow HoC_p \rightarrow HoD$

Possiamo anche definire i derivati delle trasformazioni naturali

$\tau: F \rightarrow F'$  di Quillen sinistro

$L\tau := Ho\tau \circ HoQ$  in maniera che  $(L\tau)_x = \tau_{Qx} \quad \forall x \in C$   
 $\Gamma$  è lo stesso con  $R$  per  $RG$  tra Quillen destro

Prop  $L(\tau \circ \tau') = L\tau \circ L\tau'$  e  $L(id_F) = id_{LF}$  da sulle trasformazioni naturali

Ma  $L(id_C) = HoQ \neq id_{HoC}$  ma vale a meno di omorfismo (così come l'associatività)

Lemma  $(F, G, \varphi)$  agenzione di Quillen tra  $C$  e  $D$

$\rightarrow (LF, RG, R\varphi)$  agenzione tra  $HoC$  e  $HoD$

Def Un'agenzia di Quillen si dice equivaleza di Quillen se la sua derivata è un'equivaleza di categorie

Prop Se e solo se  $(FA \rightarrow Y \in W_D \Leftrightarrow A \rightarrow GY \in W_C)$

Ex 1)  $C = Top$ ,  $W =$  equivaleze omotopiche deboli,

$Fib =$  fibrazioni di Serre =  $RLP(\{ D^m \rightarrow D^m \times I \}_{m \in \mathbb{N}})$   
(metri di)

$CoF = LLP(WnFib)$  Gli oggetti cofibranti sono i CW complessi e ogni oggetto è fibrante.

Inoltre  $WnFib = RLP(\{ S^{m-1} \hookrightarrow D^m \}_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}})$



2)  $\mathcal{C} = \text{Ch}(\mathbb{R})$  (omologici)  $W = \text{qis}$   $\text{Fib} = \text{sezioni in ogni grado}$   
 $= \text{RIP}(\{0 \rightarrow \mathbb{Z}^n\}_{n \in \mathbb{Z}})$

Def 22

$\text{Cofib} =$  iniettive con nucleo cofibrante

$W \cap \text{Fib} = \text{RIP}(\{S^{n-1} \rightarrow D^n\}_{n \in \mathbb{Z}})$

$[X \in \text{Ch}(\mathbb{R}) \text{ cofibrante} \Rightarrow X_n \text{ proiettivo } \forall n$   
 $X_n \text{ proiettivo } \forall n \text{ e } X \text{ bounded} \Rightarrow X \text{ cofibrante}$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots & \text{gr} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_R & & \downarrow & & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & R & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots & D^n \\ & & & & \downarrow \text{id}_R & & & & & & & \end{array}$$

3)  $\mathcal{C} = \text{sSet}$   $W = \{f: K \rightarrow L \mid |f|: |K| \rightarrow |L| \text{ e' un'ep. omotopica debole}\}$

$\text{Fib} = \text{RIP}(\{ \Lambda^n[n] \hookrightarrow \Delta[n] \}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n}})$  "fibrations di Kan"

oggetti fibranti = quelli che soddisfanno la condizione di estensione

$\text{Cofib} = \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$   
 $= \text{monomorfismi}$

$W \cap \text{Fib} = \text{RIP}(\{ \partial \Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] \}_{n \in \mathbb{N}})$

4)  $| - | = \text{sSet} \rightleftarrows \text{Top} = \mathcal{J}_*(-)$  e' un'equivalenza di Quillen

5) Abbiamo anche  $\mathcal{G} = \text{sSet} \rightleftarrows \text{Cat} = \mathcal{N}$   $\xrightarrow[\text{inje}]{\text{aggiunzione}} \text{Gpd} = \text{inclusioni}$

$K \mapsto \begin{cases} \text{obj } \mathcal{G}K = K_0 \\ \text{morfi} = K_1 \text{ con relazioni date da } K_2: \end{cases}$

$x_1 = x_0 x_2$  se  $\exists x \in K_2$

$\partial_1 x = x_1, \partial_2 x = x_2, \partial_0 x = \emptyset$

E' un'aggiunzione di Quillen se diamo a  $\text{Cat}$  una struttura modello con  $W = \text{epivalenze}$ ,  $\text{Cof} = \text{functor iniettivi sugli oggetti}$ .

6) Equivalenza di Dold-Kan  $\text{sAb} \cong \text{Ch}^{30}(\mathbb{Z}) \leftarrow \text{con restrizione delle strutture modello di } \text{Ch}(\mathbb{Z})$

e' equivalenza di Quillen  $M: \text{Ch}^{30}(\mathbb{Z}) \rightleftarrows \text{sAb} = \mathcal{N}$   
 $\uparrow$   
 Normalizzazione