Set 12

INSIEMI SIMPLICIALI, OMOTOPIA e CATEGORIE SUPERIORI

[PARTE SECONDA]

§-1 RICHIAMI

§0 INTRODUZIONE

★ **MOTIVAZIONI** Abbiamo visto che se $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un funtore semi-esatto (= esatto solo a destra / solo a sinistra) si può derivare F a $\mathbb{R}F / \mathbb{L}F : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$. La ricetta è:

1) $\mathcal{A} \hookrightarrow Ch(\mathcal{A})$ immergiamo $\mathcal{A}$ nella categoria abeliana dei comple[ssi]

2) $\forall X \in \mathcal{A}$ $\exists Y^{\bullet} \in Ch(\mathcal{A})$ t.q. $Y^{\bullet}$ è "buono" (= iniettivo, proiettivo, adatto etc...) e $Y^{\bullet} \xrightarrow{q} X$ $(/ X \xrightarrow{q} Y^{\bullet})$ è q.i.s

Allora $\mathbb{R}F(X) := F(RX)$ / $\mathbb{L}F(X) := F(QX)$.

Cosa succede quando $\mathcal{A}$ non è più una categoria abeliana? Non tutto è perduto: D. Quillen ha pensato di usare

1) $\mathcal{A} \hookrightarrow s\mathcal{A}$ oggetti simpliciali in $\mathcal{A}$

2) una "struttura modello" su $s\mathcal{A}$ che permette di rimpiazzare $X \in \mathcal{A}$ con $Y_{\bullet} \in s\mathcal{A}$ omotopicamente più migliore e "quasi-isomorfo" (= debolmente equivalente) a X.

$\Rightarrow$ funtori derivati (1968)

★ **OMOTOPICAMENTE BUONO ?!?**

Per esempio $\mathcal{A} = Top$ non è abeliana, ma ci interessano costruzioni a meno di omotopia. Si parte da:

Teorema (Whitehead) $\forall X, Y$ CW complessi (connessi). Se $f: X \to Y$ continua induce $f_*: \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_n(Y)$ iso $\forall n$ (e $\forall$ pto base) $\Rightarrow$ f è un'equivalenza omotopica

Proposizione (Approssimazione CW) $\forall X \in \mathrm{Top}$ $\exists Z$ CW complesso, $\exists f: Z \to W$ t.c. f_* è iso su π_n $\forall n$ (si dice che è una equivalenza omotopica debole)

Quindi se ci interessa l'omotopia possiamo ~~...~~ lavorare con i CW.

sSet 13

§1 CATEGORIE MODELLO: DEFINIZIONI

Ref: Hovey "Model Categories"
Dwyer-Spalinski

Def Una struttura modello su una categoria $\mathcal{C}$ è il dato di tre sottocategorie di morfismi

W = equivalenze deboli, Cof = cofibrazioni, Fib = fibrazioni

e di fattorizzazioni funtoriali

$(\alpha, \beta): \mathrm{Map}\, \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^1$ ← categoria dei morfismi in $\mathcal{C}$

$(\gamma, \delta): \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^1$

tale che:

[due-su-tre] Se f, g sono morfismi in $\mathcal{C}$ componibili come $g \circ f$, se due di $f, g, g\circ f$ sono in W lo è anche il terzo

[retratti] Dato ogni diagramma di retrazione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "id_A"] \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[rr, bend right, "id_B"] \arrow[r] & D \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Se g è in W o in Fib o in Cof $\Rightarrow$ lo è anche f

[fattorizzazione] Ogni $f \in \mathcal{C}^1$ è fattorizzato come

$f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ $\quad \alpha(f) \in Cof$ $\quad \beta(f) \in W \cap Fib$ — fibrazioni triviali

$f = \delta(f) \circ \gamma(f)$ $\quad \gamma(f) \in W \cap Cof$ $\quad \delta(f) \in Fib$

cofibrazioni triviali

[sollevamento] Ogni diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

in cui $i \in Cof$, $p \in Fib$ e una delle due è anche in W,

ammette un sollevamento $h : B \to X$

$ph = g$, $hi = f$

Si dice che le cofibrazioni (resp. le cofibrazioni triviali) hanno la proprietà di sollevamento a sinistra rispetto alle fibrazioni triviali (risp. fibrazioni),

$Cof \subseteq LLP(W \cap Fib)$ $\quad$ $W \cap Cof \subseteq LLP(Fib)$

e l'analogo duale $\quad$ $Fib \subseteq RLP(W \cap Cof)$ $\quad$ $W \cap Fib \subseteq RLP(Cof)$

Def Una categoria modello (chiusa) è una categoria $\mathcal{C}$ completa e cocompleta, dotata di una struttura modello $(W, Fib, Cof, (1), (2), (3))$

Ex $\mathcal{C}^{op}$, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, $Ch(R)$ definendo $Fib = RLP(W \cap Cof)$ della settimana scorsa [non banale da mostrare]

Rmk In particolare se $\mathcal{C}$ è una categoria modello $\exists$

$0 := \varinjlim \emptyset$ oggetto iniziale

$1 := \varprojlim \emptyset$ oggetto finale, diciamo che

$A \in \mathcal{C}$ è cofibrante se $(\emptyset \to A) \in Cof$

fibrante se $(A \to 1) \in Fib$.

Dalle proprietà della fattorizzazioni abbiamo

$$(0 \to A) = \Big(0 \underset{Cof}{\overset{\alpha}{\longrightarrow}} QA \underset{W \cap Fib}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} A\Big)$$

QA è cofibrante e

$Q- : A \mapsto QA$ è un funtore

che ammette una trasformazione naturale $\mathcal{Q} \xrightarrow{q} id_{\mathcal{C}}$. (set 15)
con componenti in W

Lemma Se $f = p \circ i$, f ha LLP rispetto a p $\Rightarrow$ f è retratto di i
f ha RLP ... i $\Rightarrow$ ... p

Γ
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "\exists h"] & C \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "id_{\mathcal{C}}"] & B \arrow[r, "p"'] & C \end{tikzcd}$$
$\lrcorner$

Corollario Se $\mathcal{C}$ è una categoria modello siamo sempre nella situazione del Lemma $\Rightarrow$

$$Cof = LLP(W \cap Fib) \qquad W \cap Cof = LLP(Fib)$$
$$Fib = RLP(W \cap Cof) \qquad W \cap Fib = RLP(Cof)$$

$$Iso(\mathcal{C}) \in RLP(\mathcal{C}^1) \cap LLP(\mathcal{C}^1) \rightarrow Iso(\mathcal{C}) \subseteq W \cap Fib \cap Cof.$$

Rmk Cof e $W \cap Cof$ sono chiusi rispetto ai pushout
Fib e $W \cap Fib$ ... pullback

OMOTOPIA

Def $\mathcal{C}$ categoria modello, $f, g : B \rightarrow X$ in $\mathcal{C}$

* un oggetto cilindro per A è una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} B \amalg B \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, "i_0 \amalg i_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\ & IB \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} i_0 \amalg i_1 \in Cof \\ s \in W \end{array}$$

* un'omotopia sinistra tra f e g è $H : IB \rightarrow X$, IB ogg. cilindro

tale che
$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\ IB \arrow[r, "H"] & X \\ B \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad f \overset{\ell}{\sim} g$$

Le nozioni duali sono l'oggetto cammino X^I (5 ott 16)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "r"'] & \circlearrowleft & X\times X \\ & X^I \arrow[ur, "(p_0,p_1)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} r\in W \\ (p_0,p_1)\in Fib \end{matrix}$$

e omotopia destra tra f e g $\quad K: B \to X^I$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & & X \\ B \arrow[r, "K"'] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X^I \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ & & X \end{tikzcd} \qquad f \overset{r}{\sim} g$$

Rmk le fattorizzazioni funtoriali ci danno path e cylinder object "canonici" nel senso che ogni altro path object è debolmente equivalente al canonico (e lo stesso per i cylinder). $(\text{cylinder})^{op}$ = path

$\overset{\ell}{\sim}$ e $\overset{r}{\sim}$ non coincidono in generale!
e non sono nemmeno stabili per composizione con altre mappe ($f \overset{\ell}{\sim} g \not\Rightarrow hf \overset{r}{\sim} hg$ né $fh \overset{r}{\sim} gh$)

Proposizione $\mathcal{C}$ categoria modello, $f,g: B \to X$ in $\mathcal{C}$

- Se $f \overset{\ell}{\sim} g$ e $h: X \to Y \Rightarrow hf \overset{\ell}{\sim} hg$
  $k: A \to B$ e X è fibrante $\Rightarrow fk \overset{\ell}{\sim} gk$ [+ duale]
- Se B è cofibrante $\overset{\ell}{\sim}$ è relazione di equivalenza su $Hom_{\mathcal{C}}(B,X)$ [+ duale]
- Se B è cofibrante, $h: X \to Y$ è in $W \cap Fib$ o in W e X,Y sono fibranti
  $\Rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B,X)/\overset{\ell}{\sim} \ \overset{h\circ -}{\simeq}\ Hom_{\mathcal{C}}(B,Y)/\overset{\ell}{\sim}$ [+ duale]
- Se B è cofibrante, $f \overset{\ell}{\sim} g \Rightarrow f \overset{r}{\sim} g$ e $\forall X^I$ path object per X
  $\exists$ omotopia destra $K: B \to X^I$ da f a g. [+ duale]

Corollario $\mathcal{C}$ categoria modello, B cofibrante e X fibrante (sett 17)

$f, g : B \to X$. Allora $f \overset{l}{\sim} g \iff f \overset{r}{\sim} g$. [d'ora in poi solo $\sim$]

$\sim$ è di equivalenza su $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$ e possiamo costruire omotopie con qualsiasi path o cylinder object.

Def $f : B \to X$ è un'<u>equivalenza omotopica</u> se $\exists\, g : X \to B$

t.c. $fg \sim id_X$ e $gf \sim id_B$.

$\mathcal{C}_c$ = sottocat. piena degli ogg. cofibranti
$\mathcal{C}_f$ ------------ fibranti
$\mathcal{C}_{cf} = \mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_f$

Proposizione $\mathcal{C}$ categoria modello.

$f : A \to B$ in $\mathcal{C}_{cf}$ è un'equivalenza debole $\iff$ f è un'equivalenza omotopica.

dim ($\Rightarrow$) $f \in W$. $\forall\, X \in \mathcal{C}_{cf}$ abbiamo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{cf}/\sim}(X, A) \xrightarrow[f \circ -]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{cf}/\sim}(X, B)$

e in particolare se $X = B$ $\quad \mathrm{Hom}(B, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, B)$

$\exists!\ g \longmapsto id_B \qquad g : B \to A$

$fg \sim id_B$

$\Rightarrow fgf \sim f$. Se ora $X = A$ sia id_A che gf sono inviati da $f \circ -$ su $f \sim fgf$ $\Rightarrow id_A \sim gf$

($\Leftarrow$) f equiv. omotopica. Fattorizzo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

$g \in W \cap Cof$
$p \in Fib$

$\Rightarrow C \in \mathcal{C}_{cf}$ e g è eq. omotopica

Claim: $p \in W$ [$ff' \overset{l}{\sim} id_B$ via $H : IB \to B$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "gf'"] \arrow[d, "i_0"'] & C \arrow[d, "p"] \\ IB \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists H'"] & B \arrow[u, bend right, "q"'] \end{tikzcd}$$

$H' : H'i_0 = gf' \overset{l}{\sim} q := H'i_1$, $pq = id_B$. Se $gg' \sim id_C$

$\Rightarrow p \sim pgg' = fg'$ e $qp \sim (gf')(fg') \sim id_C$. Allora $qp \in W$

p è retratto di qp $\Rightarrow p \in W$] $\Rightarrow f = pg \in W$ ∎

Def $\mathcal{C}$ categoria modello. La <u>categoria omotopa</u> di $\mathcal{C}$ (sSet 18)

è $\quad Ho\mathcal{C} := \mathcal{C}[W^{-1}]$

Rmk i rimpiazzamenti cofibranti Q e fibranti R dicono che $\forall f: X \to Y$ in $Ho\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, bend left] & QX \arrow[u] \arrow[r] & RY \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

f è la composizione

$X \leftarrow QX \to RX \leftarrow Y$ in $Ho\mathcal{C}$

Proposizione $\mathcal{C}$ categoria modello. Le inclusioni inducono equivalenze

$$\begin{tikzcd} & Ho\mathcal{C} & \\ Ho\mathcal{C}_c \arrow[ur, "\sim"] & & Ho\mathcal{C}_f \arrow[ul, "\sim"'] \\ & Ho\mathcal{C}_{cf} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Γ $Ho\mathcal{C} \underset{HoQ}{\overset{Hoi}{\leftrightarrows}} Ho\mathcal{C}_c \qquad i: W \to W$ è ben def $Hoi: Ho\mathcal{C}_c \to Ho\mathcal{C}$.

Il quasi-inverso è ~~dat~~ indotto dal rimpiazzamento cofibrante $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}_c$

e gli isomorfismi naturali $HoQ \circ Hoi \to id_{Ho\mathcal{C}_c}$ e $Hoi \circ HoQ \to id_{Ho\mathcal{C}}$

sono indotti da $q: Q \to id_{\mathcal{C}}$ $\qquad 0 \to QX \xrightarrow{q_X} X$ $\lrcorner$

Corollario $\mathcal{C}$ categoria modello, $\exists!$ isomorfismo di categorie

$j: \mathcal{C}_{cf}/_\sim \longrightarrow Ho\mathcal{C}_{cf}$ tale che commuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{cf} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \mathcal{C}_{cf}/_\sim \\ Ho\mathcal{C}_{cf} \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

⌈ Infatti δ ~~che~~ soddisfa la proprietà universale della localizzazione : (slot 19)

δ manda hep ~~in~~ = wep in isomorfismi ; sia ~~se~~ $F: \mathcal{C}_{cf} \to \mathcal{D}$ che manda wep in iso,

se $f \sim g : A \to B$ in $\mathcal{C}_{cf}$ $\Rightarrow$ $Ff = Fg$

quindi è ben definito $\bar{F} : \mathcal{C}_{cf}/_{\sim} \to \mathcal{D}$ e $\bar{F}\delta = F$

$[f] \longmapsto Ff$

$\Rightarrow \exists !$ iso $\mathcal{C}_{cf} \cong Ho\,\mathcal{C}_{cf}$ ⌋

Riassumendo:

Teorema $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, W, Fib, Cof)$ categoria modello

$$\mathcal{C}_{cf}/_{\sim} \underset{iso}{\cong} Ho\,\mathcal{C}_{cf} \underset{eq}{\simeq} Ho\,\mathcal{C}$$

e

$$Hom_{Ho\mathcal{C}}(\gamma X, \gamma Y) \cong Hom_{\mathcal{C}}(QX, RY)/_{\sim}$$

$\gamma : \mathcal{C} \to Ho\,\mathcal{C}$ identifica mappe omotopiche e

$\gamma(f)$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow f \in W$

FUNTORI DERIVATI À LA QUILLEN

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie modello. $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ aggiunzione (F, G)

F è un funtore sinistro di Quillen se $F(Cof_{\mathcal{C}}) \subseteq Cof_{\mathcal{D}}$ e $F(Cof_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}}) \subseteq Cof_{\mathcal{D}} \cap W_{\mathcal{D}}$

G è un funtore destro di Quillen se $G(Fib_{\mathcal{D}}) \subseteq Fib_{\mathcal{C}}$ e $G(W_{\mathcal{D}} \cap Fib_{\mathcal{D}}) \subseteq W_{\mathcal{C}} \cap Fib_{\mathcal{C}}$

e $\left(F, G, \varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G-)\right)$ si dice (sSet 20)

aggiunzione di Quillen se F, G sono come sopra

Rmk F Quillen sinistro, $F \dashv G \Rightarrow G$ Quillen destro (e duale)

Lemma (K. Brown) $\mathcal{C}$ categoria modello, $\mathcal{D}$ categoria con equivalenze deboli W.

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ che manda cofibrazioni triviali tra oggetti cofibranti in equivalenze deboli. Allora F invia eq. deboli tra oggetti cofibranti in equivalenze deboli.

Dualmente se $F(W \cap Fib \cap \mathcal{C}_f) \subseteq W \Rightarrow F(W \cap \mathcal{C}_f) \subseteq W$

$f : A \to B$ in $W \cap \mathcal{C}_c$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\in Cof"] \arrow[d, "Cof \ni"'] & A \arrow[d, "i_0"] \\ B \arrow[r, "i_1"'] & A \amalg B \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow i_0, i_1 \in Cof$ (sono pushout di Cof).

Fattorizziamo

$$\begin{tikzcd} A \amalg B \arrow[rr, "f \amalg id_B"] \arrow[dr, "q"', "\in Cof"] & & B \\ & C \arrow[ur, "p \in W \cap Fib"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "i_0"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & & & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & A \amalg B \arrow[r, "q"] & C \arrow[r, "p"] & B \\ & B \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[rrru, bend right, "id_B"'] & & & \end{tikzcd}$$

$\underset{\in W}{f} = \underset{\in W}{p} \circ (q \circ i_0) \Rightarrow q \circ i_0 \in W$

$\underset{\in W}{p} \circ (q \circ i_1) = \underset{\in W}{id_B} \Rightarrow q \circ i_1 \in W$

$\Rightarrow q \circ i_0$ e $q \circ i_1$ soddisfano le ipotesi

$\Rightarrow F(q \circ i_0), F(q \circ i_1) \in W$

$F(p) \circ \underset{\in W}{F(q \circ i_1)} = F(p \circ q \circ i_1) = F(id_B) = \underset{\in W}{id_{FB}} \to F(p) \in W$

e $F(f) = F(p) \circ F(q \circ i_0) \in W$ $\blacksquare$

Il lemma di Brown giustifica:

Set 21

Def $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Quillen sinistro, definiamo il suo funtore <u>derivato totale a sinistra</u> $\mathbb{L}F: Ho\,\mathcal{C} \to Ho\,\mathcal{D}$ come la composizione $Ho\,\mathcal{C} \xrightarrow{HoQ} Ho\,\mathcal{C}_c \xrightarrow{HoF} Ho\,\mathcal{D}$

$G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Quillen destro, definiamo il suo funtore <u>derivato totale a destra</u> $\mathbb{R}G := HoG \circ HoR : Ho\,\mathcal{C} \to Ho\,\mathcal{C}_f \to Ho\,\mathcal{D}$

Possiamo anche definire i derivati delle trasformazioni naturali $\tau: F \to F'$ di Quillen sinistri

$\mathbb{L}\tau := Ho\tau \circ HoQ$ in maniera che $(\mathbb{L}\tau)_X = \tau_{QX}$ $\forall X \in \mathcal{C}$

[e lo stesso con R per $\mathbb{R}\tau$ tra Quillen destri]

Rmk $\mathbb{L}(\tau \circ \tau') = \mathbb{L}\tau \circ \mathbb{L}\tau'$ e $\mathbb{L}(id_F) = id_{\mathbb{L}F}$ ok sulle trasformazioni naturali

Ma $\mathbb{L}(id_{\mathcal{C}}) = HoQ \neq id_{Ho\,\mathcal{C}}$ ma vale a meno di isomorfismo.
(così come l'associatività)

Lemma (F, G, φ) aggiunzione di Quillen tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$

$\Rightarrow$ $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}G, \mathbb{R}\varphi)$ aggiunzione tra $Ho\,\mathcal{C}$ e $Ho\,\mathcal{D}$

Def Un'aggiunzione di Quillen si dice <u>equivalenza di Quillen</u> se la sua derivata è un'equivalenza di categorie

Rmk se e solo se $\left(FA \to Y \in W_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow A \to GY \in W_{\mathcal{C}} \right)$

Ex 1) $\mathcal{C} = Top$, $W =$ equivalenze omotopiche deboli,

$Fib =$ fibrazioni di Serre $= RLP(\{D^n \hookrightarrow D^n \times I\}_{n \in \mathbb{N}})$
(retratti di)

$Cof = LLP(W \cap Fib)$ Gli oggetti cofibranti sono i CW complessi e ogni oggetto è fibrante.

Inoltre $W \cap Fib = RLP(\{S^{n-1} \hookrightarrow D^n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus 0})$

2) $\mathcal{C} = Ch(R)$ (omologici) $W =$ qis $Fib =$ suriezioni in ogni grado $= RLP(\{0 \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ sSet 22

Cof = iniettive con nucleo cofibrante

$W \cap Fib = RLP(\{S^{n-1} \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$

$\ulcorner X \in Ch(R)$ cofibrante $\Rightarrow X_n$ proiettivo $\forall n$

X_n proiettivo $\forall n$ e X bounded $\Rightarrow X$ cofibrante

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, "id_R"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & S^{n-1} \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "id_R"'] & R \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots & D^n \end{tikzcd}$$

3) $\mathcal{C} =$ sSet $W = \{f: K \to L \mid |f|: |K| \to |L|$ è un'eq. omotopica debole$\}$

$Fib = RLP(\{\Lambda^r[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}_{n\in\mathbb{N},\, 0\le r\le n})$ "fibrazioni di Kan"

oggetti fibranti = quelli che soddisfano la condizione di estensione

$Cof = LLP(W \cap Fib)$ $W \cap Fib = RLP(\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}_{n\in\mathbb{N}})$

= Monomorfismi

4) $|-|:$ sSet $\rightleftarrows$ Top $: S_*(-)$ è un'equivalenza di Quillen

5) Abbiamo anche $\mathcal{G}:$ sSet $\rightleftarrows$ Cat $: N$ aggiunzione inversa $:$ Cat $\rightleftarrows$ Gpd : inclusione

$K \longmapsto \begin{cases} \text{obj } \mathcal{G}K = K_0 \\ \text{morfismi} = K_1 \text{ con relazioni date da } K_2: \end{cases}$

$x_1 = x_0 x_2$ se $\exists x \in K_2$

$\partial_1 x = x_1,\ \partial_2 x = x_2,\ \partial_0 x = x_0$

È un'aggiunzione di Quillen se diamo a Cat una struttura modello con $W =$ equivalenze, $Cof =$ funtori iniettivi sugli oggetti.

6) Equivalenza di Dold-Kan $sAb \simeq Ch^{\ge 0}(\mathbb{Z})$ con restrizione della struttura modello di $Ch(\mathbb{Z})$

è equivalenza di Quillen $M : Ch^{\ge 0}(\mathbb{Z}) \rightleftarrows sAb : N$

Normalizzazione