INSIEMI SIMPLICIALI, OMOTOPIA & CATEGORIE SUPERIORI ⌈PARTE PRIMA⌋

§0 INTRODUZIONE

Abbiamo visto che Top e $Ch(R)$ hanno nozioni di "omotopia". Queste sono inoltre collegate: $\exists$ un funtore $S_\bullet : Top \to Ch(R)$ ⌈Top = compactly generated $T2$⌋ che associa ad ogni spazio topologico X il complesso di catene singolari a coeff in R $S_\bullet X$: se $X \xrightarrow{f} Y$ è un'equivalenza omotopica (debole) allora

$$S(f) = S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y) \quad \text{è un quasi-isomorfismo.}$$

Abbiamo quindi un funtore indotto ⌈~~[illegible]~~ ??⌋

$$hS : hTop \longrightarrow h(Ch(R)) \quad \text{tra le categorie omotopiche.}$$

Vedremo che è possibile dare una definizione astratta di queste proprietà.
⌈suspense...⌋

Introduciamo un'altra categoria dotata di una teoria dell'omotopia algebrico/combinatoria.

§1 INSIEMI SIMPLICIALI

Ref: • Weibel
• May
• (GM)
• (Hovey)

Def Definiamo la categoria Δ i cui oggetti sono i numeri naturali $[n] = \{0 < \dots < n\}$ $n \geq 0$ e i cui morfismi sono le funzioni $\alpha : [m] \to [n]$ non-decrescenti:

$$\alpha(i) \leq \alpha(j) \quad \forall\, 0 \leq i \leq j \leq m.$$

⌈$[n] = 0 \to 1 \to 2 \to \dots \to n \in Cat$
$\Rightarrow Hom_\Delta([m],[n]) = Funct([m],[n]) = Hom_{Cat}([m],[n])$⌋

Ci sono dei morfismi particolari in Δ:

$$\varepsilon_i : [n-1] \longrightarrow [n] \qquad \varepsilon_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j < i \\ j+1 & \text{se } j \geq i \end{cases}$$ "manca il valore i"

$0 \leq i \leq n$

$$\eta_i : [n+1] \longrightarrow [n] \qquad \eta_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j \leq i \\ j-1 & \text{se } j > i \end{cases}$$ "va due volte su i"

Gli ε_i e i η_j soddisfano le identità:

(*)
$$\begin{cases} \varepsilon_j \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_{j-1} & \text{se } i<j \\ \eta_j \eta_i = \eta_i \eta_{j+1} & \text{se } i \leq j \end{cases} \qquad \eta_j \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i \eta_{j-1} & \text{se } i<j \\ id_{[n-1]} & \text{se } i=j \text{ o } j+1 \\ \varepsilon_{i-1} \eta_j & \text{se } i>j+1 \end{cases}$$

e generano tutti gli altri morfismi in modo unico

Lemma $\forall \alpha : [m] \to [n]$ in Δ esiste un'unica fattorizzazione $\alpha = \varepsilon \eta$

dove $\varepsilon = \varepsilon_{i_1} \circ \dots \circ \varepsilon_{i_s}$ $\qquad 0 \leq i_s < \dots < i_1 \leq n$

$\eta = \eta_{j_1} \circ \dots \circ \eta_{j_t}$ $\qquad 0 \leq j_1 < \dots < j_t \leq m$

$\ulcorner$

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[rr] \arrow[d, "\eta_{j_t}"'] & & {[p]} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[n]} \\
{[m-1]} \arrow[r, "\eta_{j_{t-1}}"'] & {[m-2]} \cdots {[p+1]} \arrow[ur, "\eta_{j_1}"] & & {[p+1]} \arrow[r] & {[p+2]} \cdots {[n-1]} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$p = m - t = n - s$

$\lrcorner$

Def Data una categoria $\mathcal{C}$, un oggetto simpliciale in $\mathcal{C}$ è un funtore $K : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$. Possiede dei morfismi faccia

$\underset{\substack{\| \\ K\varepsilon_i}}{\partial_i} : K[n] \to K[n-1]$ e degenerazione $\underset{\substack{\| \\ K\eta_i}}{\sigma_i} : K[n] \to K[n+1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, 0 \leq i \leq n$

e questi soddisfano le identità duali alle (*).

Un morfismo tra due ~~insiemi~~ oggetti simpliciali $K, K' : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$ è una trasformazione naturale tra i due funtori.

La categoria degli oggetti simpliciali in $\mathcal{C}$ viene denotata $s\mathcal{C}$.

Rmk Ci interesseremo in particolare agli insiemi simpliciali:

possiamo pensare $K \in sSet$ come il dato di una famiglia di insiemi $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con funzioni ∂_i, σ_i $0 \le i \le n$ che soddisfano le identità simpliciali.

$x \in K_n$ è un n-simplesso, degenere se $x = \sigma_i y$ per qualche $y \in K_{n-1}$, per i

Ex (1) $\forall A \in Set$ abbiamo l'insieme simpliciale "costante"

$$\begin{array}{rcl} c_*A : \Delta^{op} & \longrightarrow & Set \\ [n] & \longmapsto & A \\ \alpha \downarrow & \longmapsto & \uparrow id_A \\ [m] & \longmapsto & A \end{array}$$

$c_* - : Set \hookrightarrow sSet$ è aggiunto destro al funtore di "troncamento" $\tau_0 : sSet \to Set$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo l'insieme simpliciale "rappresentabile"

$$\begin{array}{rcl} \Delta[n] : \Delta^{op} & \longrightarrow & Set \\ [m] & \longmapsto & \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n]) \\ \alpha \downarrow & \longmapsto & \uparrow -\circ\alpha \\ [p] & \longmapsto & \mathrm{Hom}_\Delta([p],[n]) \end{array}$$

cioè $\Delta[n] = \mathrm{Hom}_\Delta(-,[n])$

$\forall q \in \mathbb{N}$ $\quad \Delta[n]_q = \mathrm{Hom}_\Delta([q],[n])$ è l'insieme delle funzioni non-decrescenti da $[q]$ a $[n]$, che possiamo identificare con una stringa di $q+1$ interi non-decrescenti e scelti tra 0 e n:

$$\alpha : [q] \to [n] \quad \longleftrightarrow \quad \alpha = \{0 \le a_0 \le a_1 \le \dots \le a_q \le n\}$$

otteniamo quindi una descrizione esplicita delle mappe di faccia e degenerazione

$$\alpha\varepsilon_i =: \partial_i\alpha = \{0 \le a_0 \le a_1 \le \dots \le a_{i-1} \le a_{i+1} \le \dots \le a_q \le n\} \in \Delta[n]_{q-1}$$

$$\alpha\eta_i =: \sigma_i\alpha = \{0 \le a_0 \le a_1 \le \dots \le a_{i-1} \le a_i \le a_i \le a_{i+1} \le \dots \le a_q \le n\} \in \Delta[n]_{q+1}$$

(3) $S_*X = \mathrm{Hom}_{Top}(T_\bullet, X)$ (complesso) simpliciale singolare $\rightsquigarrow$ complesso di catene

REALIZZAZIONE GEOMETRICA

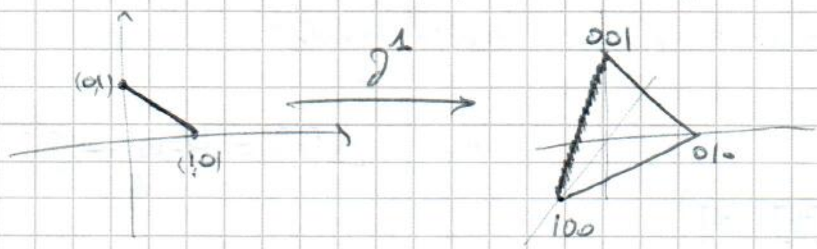
$K \in$ sSet. $\forall n$ diamo a K_n la topologia discreta, abbiamo poi a disposizione delle "forme geometriche di base": i simplessi euclidei

$$T_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; 0 \le t_i \le 1 \,,\; \sum_i t_i = 1 \right\}$$

che hanno delle mappe di "cofaccia" e "codegenerazione"

$$\partial^i (t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) \in T_{n+1}$$
$$\sigma^i (t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_n) \in T_{n-1}$$

$T : [n] \to T_n$ è un oggetto cosimpliciale in Top



Consideriamo la relazione $\sim$ su $\coprod_{n \in \mathbb{N}} K_n \times T_n \in$ Top

$(x, s) \in K_p \times T_p$ è in relazione $\sim$ con $(y, t) \in K_q \times T_q$

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in [p] \to [q]$ in Δ tale che

$$K\alpha(y) = x \quad \text{e} \quad T\alpha(s) = t .$$

Stiamo cioè identificando gli oggetti $(K\alpha(y), s)$ e $(y, T\alpha(s))$

Notiamo $|K| := \coprod_{n \in \mathbb{N}} K_n \times T_n \big/ \langle \sim \rangle$ — rel. di equivalenza generata da $\sim$

$F : K \to K'$ induce $|F| : |K| \to |K'|$
$$\overline{(x, s)} \mapsto \overline{(Fx, s)}$$

Def $|K|$ è la realizzazione geometrica di K

Teorema (Milnor 1957) $|K|$ è un CW complesso con una n-cella corrispondente a ogni n-simplesso non-degenere di K.

Proposizione
$$\mathrm{Hom}_{sSet}(K, S_*X) \simeq \mathrm{Hom}_{Top}(|K|, X)$$

dove S_*X è il complesso simpliciale singolare di $X \in Top$

$$S_*X : [n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{Top}(T_n, X)$$

0) $|\Delta[n]| = T_n$

Ex 1) Data una categoria $\mathcal{C}$, e considerando $[n] = (0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n)$ come categoria, abbiamo il funtore

$$
\begin{tikzcd}
N\mathcal{C} = \mathrm{Hom}_{Cat}((-), \mathcal{C}) : [n] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{Cat}([n], \mathcal{C}) \\
{[m]} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{Cat}([m], \mathcal{C}) \arrow[u, "-\circ(\alpha)"']
\end{tikzcd}
$$

$K \cong N\mathcal{C}$ per qualche $\mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists!$ lift in ogni $\Lambda^r[n] \to K$

cioè $N\mathcal{C}_n$ è l'insieme delle stringhe $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \to \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$ di n morfismi componibili in $\mathcal{C}$, le facce compongono e le degenerazioni inseriscono un'identità.

1bis) $G \in Grp$ gruppo $\rightsquigarrow$ G è un gruppoide con un solo oggetto $*$ e $\mathrm{Hom}_G(*, *) = G$. Poiché tutti i morfismi sono componibili si ha $NG_n = G^n$.

$BG := |NG|$ è lo spazio classificante di G:

$$\pi_i BG = \begin{cases} G & i = 1 \\ \{1\} & i \neq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_0 \mathrm{Hom}_{Top}(X, BG) \simeq \{G\text{-bundles su } X\}/_{iso}$$

spiegare poi! $Z_n = \begin{cases} G & n=1 \\ 1 & n \neq 1 \end{cases}$

Top = CW complessi e.g.!

classi di omotopia di mappe in Top

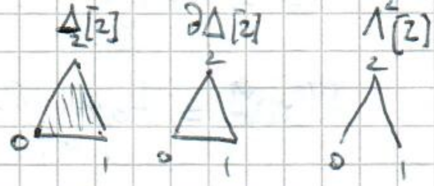
Condizione di estensione e omotopia

Definiamo due sottosimplessi notevoli di $\Delta[n]$:

→ $\partial\Delta[n]$ i cui k-simplessi non-degeneri sono le applicazioni $[k]\to[n]$ non-decrescenti, iniettive e diverse dall'identità

$$|\partial\Delta[n]| = T_n \setminus \mathring{T}_n$$

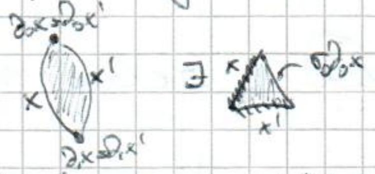
→ $\Lambda^r[n]$, l'r-corno di $\Delta[n]$, i cui k-simplessi non-degeneri sono diverse da $1_{[n]}$ e da $\varepsilon_r : [n-1]\to[n]$



$$|\Lambda^r[n]| = T_n \setminus \left(\mathring{T}_n \cup T_{n-1}\right)$$

imbeddato come r-faccia

Def Sia $K \in$ sSet. $x, x' \in K_n$ sono *omotopi*, $x \sim x'$ se $\partial_i x = \partial_i x'$ per $0 \le i \le n$ ed esiste un $(n+1)$-simplesso $y \in K_{n+1}$, chiamato *omotopia tra x e x'*, tale che



$\partial_n y = x$, $\partial_{n+1} y = x'$, $\partial_i y = \sigma_{n-1}\partial_i x = \sigma_{n-1}\partial_i x'$ se $0 \le i < n$

Def $K \in$ sSet soddisfa la *condizione di estensione di Kan* se $\forall n \in \mathbb{N}$ e per ogni scelta di $x_0, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n \in K_{n-1}$ tali che

$\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i \quad \forall\, i<j,\ i,j \ne r$ $\exists$ un n-simplesso $x \in K_n$

t.c. $\partial_i x = x_i \quad \forall\, i \ne r$

Rmk La condizione di Kan equivale a richiedere che $\forall n$,

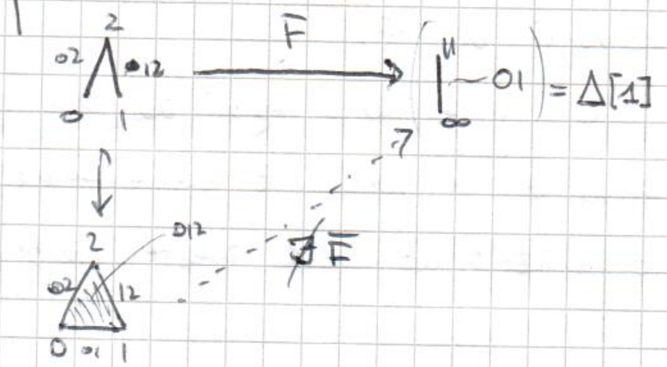
$$\forall \quad \begin{tikzcd} \Lambda^r[n] \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

x_i = immagini delle facce

x = immagine di $id_{[n]}$

Ex • $X \in Top$ $\quad S_* X$ è Kan perché $|\Delta[n]|$ si retrae su $|\Lambda^r[n]|$ $\forall r$

• $\Delta[n]$ non è Kan a meno che $n=0$!



e.g. $F: \begin{cases} 02 \mapsto 11 \\ 12 \mapsto 01 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{F}: 01 \mapsto 10$ ↯

• **Proposizione** Se $K \in sGrp$ è un gruppo simpliciale allora l'insieme simpliciale soggiacente è Kan.

Def Dato $K \in sSet$ di Kan e scelto un punto base $* \in K_0$ definiamo

$$Z_n = \{ x \in K_n \mid \partial_i x = \sigma_0^n * \quad \forall i = 0, \dots, n \}$$

K Kan $\Rightarrow$ $\sim$ è una relazione di equivalenza su Z_n $\forall n$ (lemma), quindi definiamo

$$\pi_n(K, *) := Z_n / \sim$$

l'<u>n-esimo gruppo di omotopia simpliciale</u> di K rispetto a $*$

Rmk K Kan $\quad \pi_n(K,*) \cong \pi_n(|K|, |*|)$ $\qquad$ **Ex** $\pi_1(NG, \{1\})$

Rmk si può definire intrinsecamente l'operazione sugli insiemi $\pi_n(K,*)$ $n\geq 1$:

$\alpha,\beta\in\pi_n(K,*)$ $n\geq 1$ $\alpha=[x]$, $\beta=[y]$: Set 8

$\alpha * \beta := [\partial_n z]$ ove z è ottenuto dalla condizione di Kan applicata a $s_0^n *, -, s_0^n *, x, -, y$

[ed è ben definito, dà a π_n $n\geq 1$ la struttura di gruppo, abeliano se $n\geq 2$]

$\pi_n(-,*)$ è funtoriale come uno si aspetta.

§2 ∞-CATEGORIE

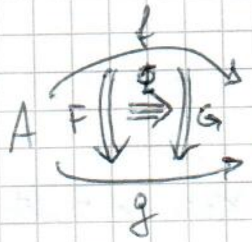
[Ref: HTT ch1]

Si dice che con le categorie non si può affermare che $A=B$ ma che $\exists\, A\xrightarrow[\sim]{\varphi}B$, vogliamo ricordarci di φ.

Se poi anche $A\xrightarrow[\sim]{\psi}B$ e φ,ψ sono legati da una relazione di compatibilità, ci ricordiamo anche quella. E quelle ancora superiori [...] come organizziamo tutte queste informazioni in maniera "efficiente"?

"Def"1 Una n-categoria $\mathcal{C}$, $n\in\mathbb{N}\cup\infty$ è il dato di una classe di ~~oggetti~~ morfismi $\forall n$

0-morfismi = oggetti



che soddisfano compatibilità di associatività, unitarietà etc...

Un modo efficiente di pensarlo è quello induttivo:

"Def"2 Una n-categoria $\mathcal{C}$, $n\in\mathbb{N}\cup\infty$ è una categoria arricchita sulle $(n-1)$-categorie

i.e. $\forall A,B$ oggetti di $\mathcal{C}$ lo spazio dei morfismi $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)$ è una $(n-1)$-cat.

Fortunatamente per molti scopi è sufficiente restringersi al considerare un tipo più trattabile: le $(\infty,1)$-categorie

cioè ∞-categorie in cui ogni n-morfismo per $n \geq 2$ è invertibile.

Se $\mathcal{C}$ è una $(\infty,1)$-categoria $\Rightarrow \forall A,B \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)$ è un ∞-gruppoide

Ex $X \in \mathrm{Top}$. Consideriamo l'oggetto categorico seguente $\Pi_\infty X$:

gli oggetti di $\Pi_\infty X$ sono i punti di X.

$\forall x,y \in X$ gli 1-morfismi $x \to y$ sono i cammini da x a y

i 2-morfismi sono le omotopie di cammini

i 3-morfismi sono le omotopie tra omotopie.

⋮

$\Pi_\infty X$ contiene tutta l'informazione omotopica di X.

In teoria dell'omotopia spesso si assume

Homotopy Hypothesis: $\mathrm{Top} \simeq \infty\text{-Gpd}$

Def 1 Una $(\infty,1)$-categoria $\mathcal{C}$ è una categoria arricchita su Top:

$\forall A,B \in \mathcal{C}$ $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) \in \mathrm{Top}$ e le composizioni

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A_0,A_1) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A_1,A_2) \times \dots \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A_{n-1},A_n) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(A_0,A_n)$$

sono associative (+ identità!)

Ma omotopicamente non c'è differenza tra Top e sSet, e lavorare con sSet è più facile:

sSet 10

Def 2 $(\infty,1)$-categoria = categoria arricchita su sSet.

Rmk Esistono diversi altri modelli di $(\infty,1)$-categorie, tutti equivalenti dal punto di vista omotopico

[quasicategorie, ~~...~~ categorie di Segal, spazi di Segal completi ...]

LOCALIZZAZIONE SIMPLICIALE (d'après DWYER-KAN 1979)

Vediamo un modo per ottenere una categoria sSet-arricchita a partire da una categoria $\mathcal{C}$ e una sottocategoria W

[W è da pensare come una sottocategoria di mappe che vogliamo invertire eg. qis in $Ch(R)$, equivalenze omotopiche deboli in Top o sSet]

Definiamo la categoria $L^H\mathcal{C}$ nel modo seguente:

$\mathrm{Obj}\, L^H\mathcal{C} = \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$, $\forall A,B\in\mathcal{C}$ $\underline{\mathrm{Hom}}_{L^H\mathcal{C}}(A,B)\in$ sSet

ha come n-simplessi le amache ridotte di larghezza n e qualsiasi ~~profondità~~ lunghezza:

$$\begin{tikzcd}
 & c_{0,0} \arrow[r, dash] \arrow[d] & c_{0,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dash] & c_{0,m} \arrow[d] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[ddr, dash] & c_{1,0} \arrow[r, dash] \arrow[d] & c_{1,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dash] & c_{1,m} \arrow[d] \arrow[r, dash] & B \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & c_{n,0} \arrow[r, dash] & c_{n,1} \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & c_{n,m} \arrow[uur, dash] &
\end{tikzcd}$$

tali che $m\geq 0$; tutte le mappe verticali sono in W e vanno nella stessa direzione; se una mappa va verso sinistra è in W; mappe in colonne adiacenti vanno in direzioni opposte e nessuna colonna contiene solo identità

La faccia i-esima ~~sono~~ è ottenuta cancellando la i-esima riga e componendo sSet 1
le mappe verticali, la i-esima degenerazione ripete la i-esima riga

Le operazioni di riduzione compongono mappe se due colonne adiacenti hanno mappe nella stessa direzione e cancellano colonne con solo identità.

Def $L^H\mathcal{C}$ è la <u>localizzazione ad amaca</u> (hammock localization) di $\mathcal{C}$ rispetto a W

<u>Proposizione</u> $\forall A,B\in\mathcal{C}$ $\quad \pi_0 \,\mathrm{Hom}_{L^H\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(A,B)$

BONUS:

$K, K' \in$ sSet $\qquad (K\times K')_n := K_n \times K'_n$ con facce e degenerazioni che agiscono per componente

Allora $\Rightarrow$ $\quad F,G : K \to K'$ sono omotope $\iff \exists\ \Phi : K\times\Delta[1] \to K'$

t.c. $\begin{cases} \Phi|_{K\times\partial_1\Delta[1]} = F \\ \Phi|_{K\times\partial_0\Delta[1]} = G \end{cases}$

$\iff \exists\ s_i : K_n \to K_{n+1} \quad \forall\, 0\le i\le n$ t.c.

$\partial_0 s_0 = F,\quad \partial_{n+1} s_n = G \qquad\qquad \partial_i s_j = s_j \partial_{i-1}$ per $i>j+1$

$\partial_i s_j = s_{j-1}\partial_i$ per $i<j \qquad\qquad \sigma_i s_j = s_{j+1}\sigma_i$ per $i\le j$

$\partial_{j+1} s_{j+1} = \partial_{j+1} s_j \qquad\qquad \sigma_i s_j = s_j \sigma_{i-1}$ per $i>j$