INTRODUZIONE

NELLA PRIMA PARTE RICORDEREMO UN PO' DI NOZIONI BASE DEI FUNTORI DERIVATI SU CATEGORIE ABELIANE NEL TENTATIVO DI GENERALIZZARE AL CASO NON ABELIANO.

NELLA SECONDA PARTE DAREMO ALLA CATEGORIA DEGLI OGGETTI SEMI-SIMPLICIALI SU $\mathcal{C}$ CATEGORIA CHIUSA PER LIMITI FINITI, UNA STRUTTURA DI CATEGORIA MODELLO CHE CI PERMETTERA' DI AVERE UN PO' DI LINGUAGGIO.

NELLA TERZA PARTE CERCHEREMO DI DARE UN SENSO AL "GRUPPO DI COOMOLOGIA DI ALGEBRE A VALORI IN MODULI" PER FAR QUESTO CI METTEREMO NELLA CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE E SFRUTTEREMO LE COSTRUZIONI VISTE PRIMA

0 - RIPASSIAMO

$\mathcal{A}$ CATEGORIA ABELIANA CON ABBASTANZA PROIETTIVI. SIA $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ FUNTORE ~~CONTRO~~VARIANTE ESATTO A DX, CIOE' PRESA $0 \to A \to B \to C \to 0$ ESATTA IN $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ E' ESATTA A DESTRA.

CI CHIEDIAMO SE ESISTE UNA MANIERA "CANONICA" DI COSTRUIRE QUALCOSA A SINISTRA PER RENDERLA ESATTA.

STIAMO QUINDI CERCANDO DEI FUNTORI $L_iF: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ t.c. $0 \leftarrow F(C) \leftarrow F(B) \leftarrow F(A) \leftarrow L_1(F(A)) \leftarrow \cdots$ CHE CI DICANO QUANTO SIA LONTANO IL FUNTORE F DALL'ESSERE ESATTO. COME LI COSTRUIAMO?

SIA $X \in Obj(\mathcal{A})$. SE $\mathcal{A}$ HA ABBASTANZA PROIETTIVI, $\exists \{P^i\} \in Obj(\mathcal{A})$ PROIETTIVI t.c. $\cdots \to P^1 \to P^0 \to X$ SIA UNA RISOLUZIONE PROIETTIVA. APPLICHIAMO F ALLA RISOLUZIONE ED OTTENIAMO:

$0 \leftarrow F(X) \longleftarrow F(P^0) \leftarrow F(P^1) \leftarrow \cdots$ CHE NON E' ESATTA. LEVANDO $F(X)$ OTTENIAMO LA SUCCESSIONE

$0 \leftarrow F(P^0) \longleftarrow F(P^1) \longleftarrow F(P^2) \leftarrow \cdots$ DELLA QUALE POSSIAMO CALCOLARNE L'OMOLOGIA

Def: $L_iF(X) = H_i(F(P^\bullet))$ CON $P^\bullet \to X$ RISOLUZIONE PROIETTIVA.

OSSERVIAMO CHE LA DEFINIZIONE E' BEN POSTA PERCHE' SE $P_1^\bullet \to X$, $P_2^\bullet \to X$ SONO RISOLUZIONI PROIETTIVE $\Rightarrow H_i(F(P_1^\bullet)) \cong H_i(F(P_2^\bullet))$

INOLTRE DATA $X \xrightarrow{f} Y \Rightarrow L^iF(X) \xrightarrow{f} L^iF(Y)$ E' BEN DEFINITA. DUNQUE ABBIAMO COSTRUITO I NOSTRI FUNTORI.

Oss: LA COLLEZIONE $\{L_iF\}$ E' UN δ-FUNTORE.

ESEMPI:
- $\mathcal{C}$ = R-MODULI SINISTRI. $Hom(A,-): \mathcal{C} \longrightarrow grp$, $B \longmapsto Hom(A,B)$ E' ESATTO A SX $\to R^i(Hom(A,-)) = Ext_R^i(A,-)$
  e' abeliana con abbastanza iniettivi
- $\mathcal{C}$ = R-MODULI DESTRI $-\otimes A$ $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $B \longmapsto B \otimes A$ E' ESATTO A DX $\to L^i(-\otimes A) = Tor_R^i(A,-)$
  e' abeliana con abbastanza proiettivi

COSA VOGLIAMO FARE? VOGLIAMO PRENDERE UNA CATEGORIA $\mathcal{C}$ QUALSIASI E CERCARE DI DEFINIRE I FUNTORI DERIVATI DA QUESTA CATEGORIA. COSA CI SERVE?

- DOBBIAMO DIRE COSA VUOL DIRE CHE UN OGGETTO SIA PROIETTIVO.
- DOBBIAMO DIRE COSA VUOL DIRE RISOLUZIONE PROIETTIVA.
- DOBBIAMO RIUSCIRE A FARE DELL'OMOLOGIA.
- VOGLIAMO CHE NEL CASO ABELIANO LE DUE DEFINIZIONI COINCIDANO.

1 - COSTRUZIONI SU $s\mathcal{C}$ E FUNTORI DERIVATI

PER LE COSTRUZIONI CHE ANDREMO A FARE PUO' ESSER UTILE FORNIRE UNA STRUTTURA ALLA CATEGORIA $s\mathcal{C}$. SUPPONIAMO CHE $\mathcal{C}$ SIA CHIUSA SOTTO LIMITI FINITI.

Def: UN **EPIMORFISMO EFFETTIVO** TRA X E Y E' $p: X \to Y$ t.c.

Def: UN OGGETTO $P \in Obj(\mathcal{C})$ E' **PROIETTIVO** SE $\forall p: X \to Y$ EPIMORFISMO EFFETTIVO, $Hom(P,-): Hom(P,X) \to Hom(P,Y)$ E' SURIETTIVO.

Def: UNA CATEGORIA **HA ABBASTANZA PROIETTIVI** SE $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$ $\exists P \in Obj(\mathcal{C})$ PROIETTIVO E $p: P \to X$ EPIMORFISMO EFFETTIVO.

Def: Diremo che un morfismo $i: A\to B$ ha la proprietà del sollevamento sx (**LLP**) rispetto a $p: X\to Y$ che ha la proprietà del sollevamento dx (**RLP**) rispetto a i se:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & Y \end{tikzcd}$$

$\forall \alpha\in Hom(A,X)$, $\forall\beta\in Hom(B,Y)$ $\exists \theta\in Hom(B,X)$ t.c. $p\circ\theta=\beta$ e $\theta\circ i=\alpha$

Def: Un morfismo in sC è **fibrazione aciclica** se $\forall P\in Obj(sC)$ proiettivo, $Hom_{sC}(P,X)\to Hom_{sC}(P,Y)$ è fibrazione aciclica in sSet cioè ha la RLP rispetto ai monomorfismi

Oss: $f: X\to Y$ fibrazione aciclica $\Leftrightarrow$ è una fibrazione di Kan suriettiva le cui fibre sono contrattili

Def: Un morfismo di sC è **cofibrazione** se ha la LLP rispetto ad ogni fibrazione aciclica

Proposizione: $\forall f\in Hom_{sC}(X,Y)$ $\exists T\in Obj(sC)$, $\exists i\in Hom_{sC}(X,T)$ cofibrazione, $\exists p\in Hom_{sC}(T,Y)$ fibrazione aciclica t.c. $f=p\circ i$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & T \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Proposizione: $\bar\alpha: A\to X^I$ omotopia, $\bar\beta: B\to Y^I$ omotopia. $i: A\to B$ cofibrazione, $p: X\to Y$ fibrazione aciclica.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X^I \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "p^I"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\bar\beta"'] \arrow[ur, dotted, "\exists\bar\theta"] \arrow[urr, dashed, bend left, "\theta_1"] \arrow[urr, dashed, "\theta_2"'] & Y^I \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

se $p^I\bar\alpha=\bar\beta\, i$, $\theta_1 i = d_0\circ\bar\alpha$, $p\circ\theta_1=d_0\circ\bar\beta$
$\theta_2\circ i=d_1\circ\bar\alpha$, $p\circ\theta_2=d_1\circ\bar\beta$

$\Rightarrow \exists\bar\theta: B\to X^I$ omotopia t.c. $d_0\circ\bar\theta=\theta_1$, $d_1\circ\bar\theta=\theta_2$

Oss $f\in Hom_{sC}(X,Y)$ $\to$ la fattorizzazione è unica a meno di omotopia. Cioè:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, bend right, "i'"'] & & Y \\ & T \arrow[ur, "p"] \arrow[d, shift right, "\exists\varphi"'] & \\ & T' \arrow[u, shift right, "\psi"'] \arrow[uur, bend right, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi\circ\varphi\sim Id$ e $\varphi\circ\psi\sim Id$

Parentesi di linguaggio: $K\in sSet$. $X\in sC$ con $K=\Delta_1$. X^I è definito come un oggetto in sC t.c.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & X\times X \\ & X^I \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

fattorizza la diagonale.

Due mappe sono omotope ($f\sim g$) $f,g: X\rightrightarrows Y$ $\Leftrightarrow$ $\exists h: X\to Y^I$ t.c. $d_0\circ h=f$, $d_1\circ h=g$

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ X \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y^I \arrow[ur, "d_0"] \arrow[dr, "d_1"'] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Def: una **risoluzione** di $X\in Obj(C)$ è $P\in Obj(sC)$ ~~proiettivo~~ e $p: P\to X\in Hom_{sC}(P,X)$ fibrazione aciclica.

Def: una risoluzione è **proiettiva** se P è proiettivo e **cofibrante** se P è cofibrante ($i\to P\in Cof$)

Oss: le risoluzioni cofibranti esistono e sono uniche a meno di omotopia.

Dunque se C è categoria con limiti finiti e abbastanza proiettivi possiamo definire, dato $F: C\to\mathcal{A}$

Def: il **funtore derivato sx** di F è $(L_iF): C\to\mathcal{A}$ t.c. $(L_iF)(X)=H_n(FP)$ con $H_n(FP)$ omologia simpliciale in categoria abeliana e P risoluzione proiettiva di X cofibrante.

Oss: se C è abeliana, $N: sC\to Ch(C)$ è equivalenza di categorie. Si osserva che:

(i) $f: X\to Y$ è fibrazione aciclica $\Leftrightarrow$ Nf è suriettiva e quasi isomorfismo
(ii) $f: X\to Y$ è cofibrazione $\Leftrightarrow$ Nf è iniettiva con $coker(Nf)_n$ proiettivo in ogni grado

$\Rightarrow$ risoluzione cofibrante di X è equivalente a risoluzione proiettiva di X

2 - GRUPPI DI OMOLOGIA / COMOLOGIA DI A-ALGEBRE

TUTTI GLI ANELLI SONO COMMUTATIVI ASSOCIATIVI CON UNITA'. TUTTI I MODULI SONO UNITARI. QUELLO CHE VOGLIAMO FARE E' DARE UN SENSO ALLA FRASE "GRUPPO DI OMOLOGIA / COOMOLOGIA PER UN A-ALGEBRA B A COEFFICIENTI IN UN B-MODULO". NEL FAR QUESTO CERCHEREMO DI INDIVIDUARE UNA STRUTTURA DI COSTRUZIONE CHE NON DIPENDA DALLA CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE, MA SOLO DA ALCUNE SUE PROPRIETA'.

DIAMO ALCUNE DEFINIZIONI ASTRATTE:

Def: $\mathcal{C}$ CATEGORIA QUALSIASI. $B\in Obj(\mathcal{C})$. LA CATEGORIA DEGLI OGGETTI SOPRA B E' **$\mathcal{C}\downarrow B$** t.c.:

- $Obj(\mathcal{C}\downarrow B) = \{(C,u_C)\in Obj(\mathcal{C})\times Hom_{\mathcal{C}}(C,B)\} = \left\{ \begin{smallmatrix} C \\ \downarrow u_C \\ B \end{smallmatrix} \right\}$
- $Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(D,C) = \{f\in Hom_{\mathcal{C}}(D,C)$ t.c. $u_D = u_C\circ f\} = \left\{ \begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u_D"'] & C \arrow[d, "u_C"] \\ & B \end{tikzcd} \right\}$

Def: $\mathcal{C}$ CATEGORIA QUALSIASI CON PRODOTTI FINITI. UN **OGGETTO-GRUPPO** E' $G\in Obj(\mathcal{C})$ t.c. ESISTONO:

- $+\in Hom_{\mathcal{C}}(G\times G, G)$ "SOMMA"
- $e\in Hom_{\mathcal{C}}(1,G)$ "INCLUSIONE IDENTITA'"
- $^{-1}\in Hom_{\mathcal{C}}(G,G)$ "INVERSO"

OVVERO $X\to Hom_{\mathcal{C}}(X,G)$ E' UN FUNTORE CONTROVARIANTE DA $\mathcal{C}$ A GRP.

METTIAMOCI ORA NELLA CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE E CERCHIAMO LA CATEGORIA GIUSTA CHE RAPPRESENTI I B-MODULI.

Def: LA CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE E' $\mathcal{A} = \mathcal{R}\uparrow A$ CON $\mathcal{R}$ CATEGORIA DEGLI ANELLI E $A\in Obj(\mathcal{R})$ CIOE':
$Obj(\mathcal{A}) = \{(B,i_B) \mid i_B: A\to B\}$

Def: SIA $B\in\mathcal{A}$. DEFINIAMO $(\mathcal{A}\downarrow B)_{AB}$ COME LA SOTTOCATEGORIA DI $\mathcal{A}\downarrow B$ DATA DAI OGGETTI-GRUPPI ABELIANI.

OSSERVIAMO CHE UN OGGETTO $N\in\mathcal{A}\downarrow B$ E' $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_N"] \arrow[rr, bend right, "i_B"'] & N \arrow[r, "u_N"] & B \end{tikzcd}$ E CHE UN MORFISMO E'

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "u_N"'] & & N' \arrow[ddl, bend left, "u_{N'}"] \\ & A \arrow[ul, "i_N"] \arrow[ur, "i_{N'}"'] \arrow[d, "i_B"] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

SIA M UN B-MODULO. OSSERVIAMO CHE POSSIAMO ASSOCIARE UN OGGETTO IN $\mathcal{A}\downarrow B$. COME?

Def: $B\in Obj(\mathcal{A})$, M B-MODULO. $B\oplus M\in Obj(\mathcal{A}\downarrow B)$ E' DEFINITO DA:

- $B\oplus M\times B\oplus M \longrightarrow B\oplus M$
  $((b,m)\ (b',m'))\longmapsto (bb', bm'+b'm)$
- $i_{B\oplus M}: A \longrightarrow B\oplus M$
  $a\longmapsto (i_B(a), \mathbb{1}_M)$
- $u_{B\oplus M}: B\oplus M \longrightarrow B$
  $(b,m)\longmapsto b$

Def: SIA $Y\in Obj(\mathcal{C}\downarrow B)$, UNA **A-DERIVAZIONE** DI Y A VALORI IN M B-MODULO (visto come B-modulo) E' $D: Y\to M$ t.c. $\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow i_Y \\ Y \\ \downarrow u_Y \\ B \end{smallmatrix}$

- $D(u_Y(a)) = \mathbb{1}_M$
- $D(yy') = u_Y(y)\cdot D(y') + D(y)u_Y(y')$

<u>LEMMA</u>: $Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(Y, B\oplus M)\cong Der_A(Y,M) \quad \forall Y\in Obj(\mathcal{C}\downarrow B)$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "u_Y"'] & & B\oplus M \arrow[ddl, bend left, "u_{B\oplus M}"] \\ & A \arrow[ul, "i_Y"] \arrow[ur, "i_{B\oplus M}"'] \arrow[d, "i_B"] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

<u>DIM</u>: SIA $f\in Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(Y,B\oplus M)$. OSSERVIAMO CHE DETTE f_1, f_2 t.c. $f(y)=(f_1(y),f_2(y))$

- $u_Y(y) = u_{B\oplus M}(f(y)) = f_1(y)$
- $(i_B(a), \mathbb{1}_M) = i_{B\oplus M}(a) = (f_1(i_Y(a)), f_2(i_Y(a)))$

DEFINIAMO $D_f: Y\to M$ CON $D_f(y)=f_2(y)$. OSSERVIAMO CHE:

- $D_f(i_Y(a)) = f_2(i_Y(a)) = \mathbb{1}_M$
- $D_f(yy') = f_2(yy') = u_Y(y')f_2(y) + f_2(y')u_Y(y) = u_Y(y')D_f(y) + D_f(y')u_Y(y)$

$\Rightarrow D_f$ E' DERIVAZIONE. VICEVERSA DATA $D: Y\to M$ BASTA DEFINIRE $f_D: Y\to B\oplus M$
$y\longmapsto (u_Y(y), D(y))$ q.e.d.

Oss: POICHE' $\{Der_A(Y,M)\}_Y$ E' GRUPPO ABELIANO CON + $\Rightarrow$ $\{Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(Y, B\oplus M)\}_Y$ E' GRUPPO ABELIANO
$\Rightarrow B\oplus M \in (\mathcal{A}\downarrow B)_{AB}$

Def: $\mathcal{M}_B$ E' LA CATEGORIA DEI B-MODULI. (RICORDA: E' ABELIANA!)

PROPOSIZIONE:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}\downarrow B)_{AB} & \longleftrightarrow & \mathcal{M}_B \\ X & \longmapsto & Ker\, u_X \\ B\oplus M & \longleftarrow\!\!\shortmid & M \end{array}$$

E' EQUIVALENZA DI CATEGORIE QUINDI IN PARTICOLARE $(\mathcal{A}\downarrow B)_{AB}$ E' ABELIANA

Def: $Y \in \mathcal{A}$. L'Y-MODULO DEGLI A-DIFFERENZIALI DI Y E' D_Y

Oss: $\exists\, d: Y \to D_Y$ t.c.

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{M}_Y}(D_Y, N) & = & Der_A(Y,N) \\ f & \longmapsto & f\circ d \end{array}$$

DUNQUE ABBIAMO

$$Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(Y, B\oplus M) \cong Der_A(Y,M) \cong Hom_{\mathcal{M}_Y}(D_Y, M) \cong Hom_{\mathcal{M}_B}(D_Y\otimes_Y B, M)$$

PROPOSIZIONE:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_B \cong (\mathcal{A}\downarrow B)_{AB} & \underset{i}{\overset{AB}{\rightleftarrows}} & \mathcal{A}\downarrow B \\ M & \longmapsto & B\oplus M \\ D_Y\otimes_Y B & \longleftarrow\!\!\shortmid & Y \end{array}$$

E' EQUIVALENZA DI CATEGORIE CON i FUNTORE DIMENTICANTE E AB E' IL FUNTORE ABELIANIZZANTE.

SIAMO ORA PRONTI A DEFINIRE IL q-ESIMO GRUPPO DI COOMOLOGIA DI $B \in \mathcal{A}$ A VALORI IN $M \in \mathcal{M}_B$ VISTO COME $B\oplus M$ SI PUO' FARE IN DUE MODI:

1. COOMOLOGIA DI FASCI
2. RISOLUZIONI SIMPLICIALI $\longleftarrow$ VEDIAMO QUESTA.

PRESA $B \in Obj(\mathcal{A})$, SAPPIAMO CHE $i_B: A \to B$. VEDIAMO $\mathcal{A}$ IMMERSA IN $s\mathcal{A}$, TRAMITE $c: \mathcal{A} \to s\mathcal{A}$, $B \mapsto cB = (\to B \overset{id}{\underset{id}{\rightrightarrows}} B \to \cdots)$
DUNQUE ABBIAMO LA MAPPA $ci_B: cA \to cB$ CHE SI FATTORIZZA:

$$\begin{tikzcd} cA \arrow[rr, "ci_B"] \arrow[dr, "i"'] & & cB \\ & P \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

OSSERVIAMO CHE P E' UNA FATTORIZZAZIONE COFIBRANTE ($i \in Cof$, $p \in Afib$)
P E' DETTO RISOLUZIONE PROIETTIVA DI A-ALGEBRE.

Def: $\mathbb{L}D_B = AB(P) = D_P\otimes_P B$ E' IL MODULO SIMPLICIALE OTTENUTO APPLICANDO A P IL FUNTORE ABELIANIZZANTE DOVE P E' RISOLUZIONE PROIETTIVA. QUESTO E' DETTO COMPLESSO COTANGENTE DELL'A-ALGEBRA B

Oss: L'OMOLOGIA DI $\mathbb{L}B_D$ E' INDIPENDENTE DA P DUNQUE HA SENSO DEFINIRE:

Def: IL q-ESIMO GRUPPO DI OMOLOGIA DELL'A-ALGEBRA B VALUTATA IN M E' $D_q(B,M) = H_q(\mathbb{L}D_B\otimes_B M)$
IL q-ESIMO GRUPPO DI COOMOLOGIA DELL'A-ALGEBRA B VALUTATA IN M E' $D^q(B,M) = H^q(Hom_{\mathcal{M}_B}(\mathbb{L}D_B, M))$

QUESTA COSTRUZIONE CI DA UN'IDEA SU COME FARE NEL CASO GENERALE. PRENDIAMO $\mathcal{C}$ CON LIMITI FINITI E ABBASTANZA PROIETTIVI. SIA $X \in Obj(\mathcal{C})$ E $M \in Obj(\mathcal{C}\downarrow X)$. SIA P RISOLUZIONE COFIBRANTE SIMPLICIALE DI X.

Def: IL q-ESIMO GRUPPO DI COOMOLOGIA DI X A VALORI IN M E' $D^q(X,M) = H^q(Hom_{\mathcal{C}\downarrow B}(P, M))$

SE $\mathcal{C}$ E' ALGEBRICA (CHIUSA PER LIMITI E AVENTE UN INSIEME DI GENERATORI PROIETTIVI) $\longleftarrow$ equivalente all'algebra universale
$\Rightarrow \exists\, Ab: \mathcal{C}\downarrow X \to (\mathcal{C}\downarrow X)_{AB}$ ABELIANIZZANTE (FUNTORE AGGIUNTO SX DEL DIMENTICANTE)

Def: DATA $P \to X$ RISOLUZIONE COFIBRANTE, $Lab(X) := ab(P) \in (\mathcal{C}\downarrow X)_{AB}$ E' BEN DEFINITO A MENO DI OMOTOPIA

Oss: TRAMITE IL FUNTORE NORMALIZZANTE E' UN OGGETTO NELLA CATEGORIA DERIVATA DI $(\mathcal{C}\downarrow X)_{AB}$

Oss: $D^q(X,M) = H^q(Hom_{(\mathcal{C}\downarrow X)_{AB}}(Lab(X), M))$

0- RICHIAMI

SIA A ANELLO. $\mathcal{A} = Ring\downarrow A$ CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE. M UN B-MODULO CON $B \in Obj(\mathcal{A})$.

$\forall X \in Obj(\mathcal{A})$ AVEVAMO INTRODOTTO L'X-MODULO DEI **DIFFERENZIALI DI KÄLER**, Ω_X CHE RICORDIAMO AVERE LA SEGUENTE PROPRIETÀ UNIVERSALE:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\forall D"] \arrow[d, "d"'] & \forall M \\ \Omega_X \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] & \end{tikzcd}$$

CON $D \in Der(X,M)$ E f X-LINEARE.

(<u>RICORDA</u>: $\Omega_X = I/I^2$ CON $I = Ker(X \otimes_A X \to X)$)

QUEST'OGGETTO CI AVEVA PERMESSO DI TROVARE LA SEGUENTE AGGIUNZIONE TRA CATEGORIE:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_B \cong (\mathcal{A}\downarrow B)_{ab} \arrow[r, shift left] & (\mathcal{A}\downarrow B) \arrow[l, shift left] \\ M \arrow[r, mapsto] & B\oplus M \\ \Omega_X \otimes_X B \arrow[u] & X \arrow[l, mapsto] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

GRAZIE ALLA RELAZIONE:

$$(*) \quad Hom_{(\mathcal{A}\downarrow B)}(X, B\oplus M) \cong Der_A(X,M) \cong Hom_{\mathcal{M}_X}(\Omega_X, M) \cong Hom_{\mathcal{M}_B}(\Omega_X \otimes_X B, M)$$

POICHÈ IN OGNI CATEGORIA $\mathcal{C}$ AVENTE LIMITI FINITI E ABBASTANZA PROIETTIVI (COME È $\mathcal{A}$) ABBIAMO ASSOCIATO UNA STRUTTURA MODELLO AD $s\mathcal{C}$, ABBIAMO CHE OGNI MAPPA DI OGGETTI SIMPLICIALI SI FATTORIZZA IN UNA COFIBRAZIONE E UNA FIBRAZIONE ACICLICA. QUESTO CI HA PERMESSO DI INTRODURRE IL **COMPLESSO COTANGENTE** DI B A-ALGEBRA COME $\mathbb{L}_B = ab(P) = \Omega_P \otimes_P B$ CON P RISOLUZIONE COFIBRANTE DELLA MAPPA

$$\begin{tikzcd} cA \arrow[rr, "i_B"] \arrow[dr, hook, "cof"'] & & cB \\ & P \arrow[ur, "A\text{-fib}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{DOVE } i_B : A \longrightarrow B$$

A QUESTO PUNTO ABBIAMO DEFINITO IL q-ESIMO GRUPPO DI OMOLOGIA E COOMOLOGIA DI B A VALORI IN $M \in \mathcal{M}_B$ COME $D^q(B,M) = H^q(Hom_{\mathcal{M}_B}(\mathbb{L}_B, M))$ E $D_q(B,M) = H_q(\mathbb{L}_B \otimes_B M)$

QUELLO CHE VOGLIAMO FARE È SCOPRIRE COME SI COMPORTANO AL VARIARE DI q E DARNE ALCUNE PROPRIETÀ.

1- FIBRAZIONI E COFIBRAZIONI

CI ERAVAMO LIMITATI A DEFINIRE COFIBRAZIONI E FIBRAZIONI ACICLICHE COME:

$f: X \longrightarrow Y$ È **FIBRAZIONE ACICLICA** $\Leftrightarrow$ $\forall P$ PROIETTIVO $Hom(P,f): Hom(P,X) \longrightarrow Hom(P,Y)$ HA LA RLP RISPETTO AI MONOMORFISMI IN $\mathcal{S}et$

$f: X \to Y$ È **COFIBRAZIONE** $\Leftrightarrow$ HA LA LLP RISPETTO AD OGNI FIBRAZIONE ACICLICA.

VEDIAMO SE POSSIAMO DARE UNA CARATTERIZZAZIONE PIÙ ESPLICITA IN ALCUNE CATEGORIE PARTICOLARI (AD ESEMPIO NELLE A-ALGEBRE) IN MODO DA CAPIRE QUALI PROPRIETÀ HA LA FATTORIZZAZIONE CHE CI HA PERMESSO DI DEFINIRE $\mathbb{L}_B$.

$\mathcal{C}$ = GRP ABELIANI: UNA FIBRAZIONE ACICLICA IN $s\mathcal{C}$ È DATA EQUIVALENTEMENTE DA:

(i) $f: X \to Y$ COME SOPRA

(ii) $f: X \to Y$ È SURIETTIVA IN OGNI GRADO E $H_\cdot(f): H_\cdot(X) \xrightarrow{\cong} H_\cdot(Y)$

(iii) $f: X \to Y$ È t.c. $\forall P$ PROIETTIVO $Hom(P,X) \to Hom(P,Y)$ HA RLP RISPETTO A $i_n: \partial[n] \to [n]$

$\mathcal{C}$ = RING: UNA FIBRAZIONE ACICLICA IN $s\mathcal{C}$ È DATA EQUIVALENTEMENTE DA:

(i) $f: X \to Y$ COME SOPRA

(ii) $f: X \to Y$ FIBRAZIONE ACICLICA COME MAPPA DI GRUPPI ABELIANI.

UNA COFIBRAZIONE IN $s\mathcal{C}$ È DATA EQUIVALENTEMENTE DA:

(i) $f: X \to Y$ COME SOPRA

(ii) $f: X \to Y$ t.c. $\exists Z \in Obj(s\mathcal{C})$ $\exists j \in Hom_{s\mathcal{C}}(X,Z)$ $\exists u \in Hom_{s\mathcal{C}_X}(Z,Y)$ $\exists v \in Hom_{s\mathcal{C}_X}(Y,Z)$ t.c. $v \circ u = Id_Z$

PRIMA DI DIMOSTRARLO DIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE:

<u>DEF</u>: UNA **MAPPA LIBERA** TRA $X, Y \in Obj(sRing)$ E' $f: X \to Y$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists C_n \subseteq Y[n]$ SOTTOINSIEMI t.c.:

1) $[p] \overset{\forall \eta}{\downarrow} [q]$ SURIETTIVA MONOTONA $\overset{Y}{\Rightarrow}$

$$\begin{tikzcd} Y[p] \supseteq C_p \supseteq \eta^* C_q \\ Y[q] \supseteq C_q \arrow[u] \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

2) $Y[n]$ E' $X[n]$-ALGEBRA LIBERA DI GENERATORI C_n (<u>NOTA</u>: $X[n] \in Obj(Ring \uparrow Y[n])$ PERCHE' $X[n] \xrightarrow{f_n} Y[n]$)

<u>PROPOSIZIONE</u>: $f: X \to Y$ HA LLP RISPETTO AD OGNI FIBRAZIONE ACICLICA $\Leftrightarrow$ $\exists Z \in Obj(sC)$ $\exists j \in Hom(X, Z)$ LIBERA [...]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "j"] \\ Z \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "Id_Z"'] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$$

TALE CHE IL DIAGRAMMA COMMUTI

<u>NOTA</u> si dice che una funzione e' una COFIBRAZIONE se e' retrazione di una mappa LIBERA

<u>DIM</u>: "$\Rightarrow$" f COFIBRAZIONE. SIA

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

FATTORIZZAZIONE t.c. j LIBERA E u FIB. ACICLICA (esiste in $C = Ring$)

ALLORA SCEGLIAMO v GRAZIE ALLA LLP RISPETTO A u:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, equal, "Id"] \arrow[ur, dashed, "\exists v"] & Y \end{tikzcd}$$

"$\Leftarrow$" OVVIO

$\square$ c.v.d.

<u>DEF</u>: $B \in Obj(sRing)$. M MODULO SIMPLICIALE SOPRA B ANELLO SIMPLICIALE E' **LIBERO** SE $\exists C_n \subseteq M[n]$ SOTTOINSIEMI t.c.

1) $[p] \overset{\forall \eta}{\downarrow} [q]$ SURIETTIVA MONOTONA $\overset{M}{\Rightarrow}$

$$\begin{tikzcd} M[p] \supseteq C_p \supseteq \eta^* C_q \\ M[q] \supseteq C_q \arrow[u] \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

2) $M[n]$ E' $B[n]$-MODULO LIBERO DI GENERATORI C_q (<u>NOTA</u>: E' COME RICHIEDERE $M_n \in \mathcal{M}_{B[n]}$ CON $M[n] \times B[n] \to M[n]$)

<u>DEF</u>: P MODULO SIMPLICIALE SU B E' **PROIETTIVO** SE E' SOMMA DIRETTA DI B-MODULI LIBERI.

<u>OSS</u>:

$$\begin{tikzcd} cA \arrow[rr] \arrow[dr, "cof"'] & & cB \\ & P \arrow[ur, "A\text{-}fib"'] & \end{tikzcd}$$

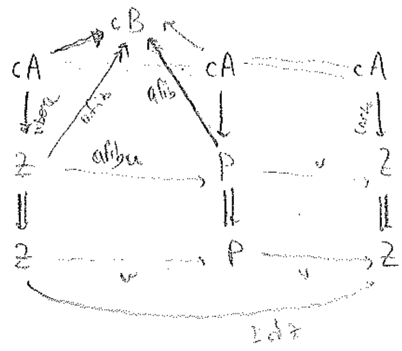
RISOLUZIONE COFIBRANTE DI B.

- P B-MODULO LIBERO DI GENERATORI C_n
  $\to \{dx \otimes 1\}_{x \in C_n} \subseteq \Omega_{P[n]} \otimes_{P[n]} B$ GENERANO
  $\Rightarrow \Omega_P \otimes_P B = \mathbb{L}_B$ E' B-MODULO SIMPLICIALE LIBERO

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"] & cB \\ \Omega_P \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

- P RISOLUZIONE COFIBRANTE. ALLORA: P E' RETRATTO DI UN OGGETTO LIBERO
  $\to \Omega_P \otimes_P B$ E' RETRATTO DI $\Omega_Z \otimes_Z B$ CHE E' LIBERO $\to \Omega_P \otimes_P B$ E' PROIETTIVO

<u>PROPOSIZIONE</u>: $\mathbb{L}_B$ E' B-MODULO PROIETTIVO SIMPLICIALE



COROLLARIO: SIA $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ SUCCESSIONE ESATTA DI B-MODULI. ALLORA SONO INDOTTE LE SEGUENTI SUCCESSIONI LUNGHE:

$$0 \to D^0(B,M') \to D^0(B,M) \to D^0(B,M'') \to D^1(B,M) \to \cdots$$

$$\cdots \to D_1(B,M'') \to D_0(B,M') \to D_0(B,M) \to D_0(B,M'') \to 0$$

DIM: $\mathbb{L}_B$ È PROIETTIVO DUNQUE $Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B,-)$ E $\mathbb{L}_B \otimes_B -$ SONO ESATTI DUNQUE LE SEGUENTI SUCCESSIONI SONO ESATTE CORTE:

$$0 \to Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B, M') \to Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B, M) \to Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B, M'') \to 0$$

$$0 \to \mathbb{L}_B \otimes_B M' \to \mathbb{L}_B \otimes_B M \to \mathbb{L}_B \otimes_B M'' \to 0$$

DUNQUE INDUCONO IN OMOLOGIA / COOMOLOGIA LE SEGUENTI SUCCESSIONI ESATTE LUNGHE:

$$0 \to \underset{D^0(B,M')}{\underset{\parallel}{H^0(Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B,M'))}} \to \underset{D^0(B,M)}{\underset{\parallel}{H^0(Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B,M))}} \to \underset{D^0(B,M'')}{\underset{\parallel}{H^0(Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B,M''))}} \to \underset{D^1(B,M')}{\underset{\parallel}{H^1(Hom_{M_B}(\mathbb{L}_B,M))}} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{D_1(B,M'')}{\underset{\parallel}{H_1(\mathbb{L}_B \otimes_B M'')}} \to \underset{D_0(B,M')}{\underset{\parallel}{H_0(\mathbb{L}_B \otimes_B M')}} \to \underset{D_0(B,M)}{\underset{\parallel}{H_0(\mathbb{L}_B \otimes_B M)}} \to \underset{D_0(B,M'')}{\underset{\parallel}{H_0(\mathbb{L}_B \otimes_B M'')}} \to 0$$

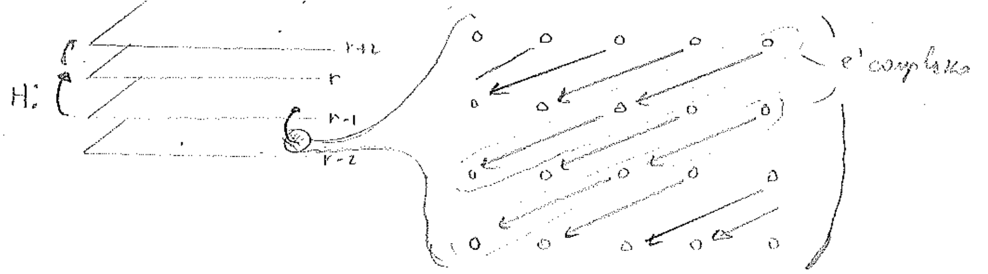
□ c.v.d.

2. PRIMI GRUPPI DI OMOLOGIA E COOMOLOGIA

PRIMA DI ANDARE AVANTI CONVIENE "ORGANIZZARE" QUESTE INFORMAZIONI NEL MACCHINARIO DELLE SUCCESSIONI SPETTRALI.

DEF: UNA **SUCCESSIONE SPETTRALE** (IN OMOLOGIA) IN UNA CATEGORIA ABELIANA $\mathcal{A}$ È UNA FAMIGLIA DI OGGETTI $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ TALI CHE:

1. $\forall r \geq r_0$ SONO DEFINITI DEI MORFISMI $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ t.c. $d^2 = 0$ (NOTA: L'INCLINAZIONE È $-\frac{r+1}{r}$)
2. $E^{r+1}_{p,q} \cong H^r(E^r_{pq}) = \dfrac{Ker(d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1})}{d^r_{p+r,q-r+1}(E^r_{p+r,q-r+1})}$ (sottoquoziente di $E^r_{p,q}$)



DEF: UNA SUCCESSIONE SPETTRALE **NEL PRIMO QUADRANTE** È E^r_{pq} t.c. $E^r_{pq} = 0$ $\forall p<0$ $\forall q<0$

PROPRIETÀ: $\forall p,q \in \mathbb{Z}$ $\exists r \in \mathbb{N}$ t.c. $E^r_{pq} = E^{r+1}_{pq}$. DENOTIAMO CON $E^\infty_{pq} = E^r_{pq}$

DEF: UNA SUCCESSIONE SPETTRALE **CONVERGE AD $H_\bullet$**: $\cdots \to H_n \to H_{n-1} \to \cdots$ (INDICHEREMO CON $E^r_{pq} \Rightarrow H_\bullet$) SE $\forall n \in \mathbb{N}$ ESISTE UNA FILTRAZIONE FINITA $0 = F_s H_n \subset \cdots \subset F_{p-1} H_n \subset F_p H_n \subset \cdots \subset F_t H_n = H_n$ t.c.

$$E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_p H_{p+q}}{F_{p-1} H_{p+q}}$$

PROPOSIZIONE: ESISTONO DUE SUCCESSIONI SPETTRALI (UNA IN OMOLOGIA E UNA IN COOMOLOGIA) t.c. PER R=2

$$E^2_{p,q} = Tor^B_p(D_q(B), M) \Longrightarrow D_{p+q}(B,M)$$

$$E_2^{p,q} = Ext^p_B(D_q(B), M) \Longrightarrow D^{p+q}(B,M)$$

COROLLARIO: $D^0(B,M) = \mathrm{Der}(B,M)$; $D_0(B,M) = \Omega_B \otimes_B M$

DIM: OSSERVIAMO CHE IL FUNTORE $X \mapsto \Omega_X \otimes_X B$ E' ESATTO A DX, DUNQUE $P_\bullet \to B \to 0$ RISOLUZIONE COFIBRANTE ALLORA $\Omega_P \otimes_P B \to \Omega_B \otimes_B B$ E' ANCORA ESATTA $\Rightarrow D_0(B) = H_0(\mathbb{L}_B \otimes_B B) \cong \Omega_B$ (!)

OSSERVIAMO CHE IN $p=q=0$, $E^{r+1} = E^r = E^2_{00} = \mathrm{Tor}_0(D_0(B), M)$ PERCHE' LA SUCCESSIONE E' NEL PRIMO QUADRANTE $\to$ $E^\infty_{00} = \mathrm{Tor}_0(D_0(B),M) = D_0(B) \otimes_B M = \Omega_B \otimes_B M$.

D'ALTRA PARTE $E^r_{pq} \Rightarrow D_{p+q}(B,M)$ ALLORA $E^\infty_{0,0} \cong F_0 D_0(B,M) / F_1 D_0(B,M) = D_0(B,M)$

$\Rightarrow D_0(B,M) \cong \Omega_B \otimes_B M$. ANALOGAMENTE L'ALTRO.

□ c.v.d.

DEF: UN'ESTENSIONE DELL'A-ALGEBRA B TRAMITE $M \in \mathcal{M}_B$ E'

$$\begin{tikzcd} & & & A \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[dr, "i_B"] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & X \arrow[rr, "u"] & & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

DOVE:

1. u E' MAPPA DI A-ALGEBRE
2. $(\mathrm{Ker}\, u)^2 = 0$
3. $i(M) \cong \mathrm{Ker}\, u$ ISOMORFISMO DI B-MODULI

DEF: UN ISOMORFISMO DI ESTENSIONI E' ϕ:

$$\begin{tikzcd} & & X' \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr] & A \arrow[l, "i_{X'}"'] \arrow[dl, "i_X"] \arrow[d, "i_B"] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \arrow[r] & 0 \\ & & X \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

CON ϕ ISOMORFISMO DI A-ALGEBRE

DEF: $\mathrm{Exalcomm}(B,M) = \{ 0 \to M \to X \to B \to 0 \mid \text{ESTENSIONE DI } B \text{ TRAMITE } M \} / _{\mathrm{ISO}}$

PROPOSIZIONE: $D^1(B,M) \cong \mathrm{Exalcomm}(B,M)$ // RICORDA: $D^1(B,M) \cong H^1(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_B}(\mathbb{L}_B, M)) \cong H^1(\mathrm{Der}_A(P,M))$

DIM: SIA P RISOLUZIONE LIBERA DI B E SIA $[0 \to M \to X \to B \to 0] \in \mathrm{Exalcomm}(B,M)$; VOGLIAMO ASSOCIARGLI UNA DERIVAZIONE DA P A M CHE SIA UN 1-COCICLO NEL COMPLESSO NORMALIZZATO $\mathrm{Der}_A(P,M)$. RICORDIAMO CHE P E' MODULO SIMPLICIALE LIBERO SE VALGONO:

① $\begin{matrix} [p] \\ \downarrow \psi \\ [q] \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} P[p] \supseteq C_p \supseteq \psi^* C_q \\ \uparrow \\ P[q] \supseteq C_q \end{matrix}$

② $P[n]$ E' B-MODULO LIBERO DI GENERATORI C_q

SIA $\theta \in \mathrm{Hom}_{A/B}(P[0], X)$ CIOE':

$$\begin{tikzcd} & & & P[0] \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "u_{P[0]}"] & & \\ & & & A \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"'] & X \arrow[rr, "u"'] & & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ALLORA OSSERVIAMO CHE:

$$\begin{tikzcd} {[1]} \\ {[0]} \arrow[u, shift left, "d_1"] \arrow[u, shift right, "d_0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P[1] \arrow[r, dashed, "i^{-1}(\theta d_0 - \theta d_1)"] \arrow[d, shift right, "d_1^*"'] \arrow[d, shift left, "d_0^*"] & M \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[l] \\ P[0] \arrow[r, "\theta"'] & X \arrow[d, "u"] & \\ & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$i^{-1}(\theta d_0 - \theta d_1)$ E' UN 1-COCICLO DEL COMPLESSO NORMALIZZATO DI $\mathrm{Der}(P,M)$ LA CUI COOMOLOGIA E' INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI θ (!)

POSSIAMO QUINDI COSTRUIRE

$$\Phi: \mathrm{Exalcomm}(B,M) \longrightarrow D^1(B,M) = H^1(\mathrm{Der}(P,M))$$
$$[0 \to M \to X \to B \to 0] \longrightarrow i^{-1}(\theta d_0 - \theta d_1)$$

ED E' INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI P.

VICEVERSA DATA $D: P[1] \to M$ COSTRUISCO $X = \mathrm{coker}\left\{ P[1] \underset{(d_1, 0)}{\overset{(d_0, D)}{\rightrightarrows}} P[0] \oplus M \right\}$

SIA $p: P[0] \oplus M \longrightarrow X$ LA PROIEZIONE CANONICA. COSTRUIAMO:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ & & P[0] \oplus M \arrow[u, "p"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$u(p(y \oplus m)) = y$, $i(m) = p(0 \oplus m)$

□ c.v.d.

COROLLARIO: $I \leq A$ IDEALE. $B \cong A/I$. ALLORA $D_0(B)=0$ E $D_1(B) \cong I/I^2$

DIM: $D_0(B) \cong \Omega_B \cong \Omega_{A/I} \cong 0$ perché $0 \to I \to A \twoheadrightarrow B \to 0$ è suriettiva (vedi seminario MICHELE)

INOLTRE $\mathrm{Exalcomm}(B,M) \cong D^1(B,M) \cong \mathrm{Hom}_B(D_1(B),M)$. VOGLIAMO MOSTRARE CHE SONO ISOMORFI AD $\mathrm{Hom}_B(I/I^2,M)$ COSÌ ABBIAMO $D_1(B) \cong I/I^2$.

successioni spettrali

$$\mathrm{Exalcomm}(B,M) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{M_B}(I/I^2, M)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I/I^2 & \to & A/I^2 & \to & B & \to & 0 \\ & & \downarrow F & \swarrow & & & & & \\ 0 & \to & M & & & & & & \end{array} & \longleftarrow & F: I/I^2 \to M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccccccc} & & & & A & & & & \\ & & & \theta \swarrow & & \searrow i_B & & & \\ 0 & \to & M & \to & X & \xrightarrow[\theta \circ i_B = u]{} & B & \to & 0 \end{array} & \longmapsto & F: I/I^2 \to M \text{ INDOTTO DA } M \cong \mathrm{Ker}(\theta i_B) \end{array}$$

□ c.v.d.

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE I FUNTORI DER E EXALCOMM POSSIEDONO LA PROPRIETÀ SEGUENTE:
DATA $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ SUCCESSIONE DI B-MODULI, ALLORA LA SEGUENTE SUCCESSIONE È ESATTA:

$$0 \to \mathrm{Der}(B,M') \to \mathrm{Der}(B,M) \to \mathrm{Der}(B,M'') \to \mathrm{Exalcomm}(B,M') \to \mathrm{Exalcomm}(B,M) \to \mathrm{Exalcomm}(B,M'')$$

3. ULTERIORI PROPRIETÀ

IN QUESTA SEZIONE SVILUPPEREMO RISULTATI CHE SONO PECULIARI DELLA CATEGORIA DELLE A-ALGEBRE PERCHÉ LA SOMMA DIRETTA È DATA DAL PRODOTTO TENSORIALE.

DEF: SIA $R \in$ SRing E M_R LA CATEGORIA ABELIANA DEGLI R-MODULI SIMPLICIALI. LA **CATEGORIA OMOTOPA** $\mathrm{Ho}(M_R)$ È QUELLA OTTENUTA DA M_R AGGIUNGENDO FORMALMENTE LE INVERSE DELLE EQUIVALENZE DEBOLI

OSS: $\mathrm{Ho}(M_R)$ È EQUIVALENTE ALLA CATEGORIA I CUI OGGETTI SONO GLI R-MODULI SIMPLICIALI PROIETTIVI CON MORFISMI DATI DALLA LORO CLASSE DI OMOTOPIA.

DEF: $X, Y \in M_R$. SIA $\mathrm{Tor}_i^R(X,Y) \in \mathrm{Ob}(M_R)$ t.c. $\mathrm{tor}_i^R(X,Y)[n] = \mathrm{tor}_i^{R[n]}(X[n], Y[n])$ OTTENUTO APPLICANDO IL TRI-FUNTORE $\mathrm{tor}_i^-(-,-)$ IN OGNI GRADO

DEF: DATI $X, Y \in \mathrm{Ob}(M_R)$ DEFINIAMO $X \overset{L}{\otimes}_R Y = L(X \otimes_R Y)$ COME IL DERIVATO DEL PRODOTTO TENSORIALE.

OSS: SIANO $P \to X$, $Q \to Y$ RISOLUZIONI PROIETTIVE (COFIBRANTI). ALLORA $X \overset{L}{\otimes}_R Y \cong P \otimes_R Q$

PROPOSIZIONE: C'È LA SEGUENTE SUCCESSIONE SPETTRALE:

$$E^2_{pq} = H_p(\mathrm{Tor}_q^R(X,Y)) \Rightarrow H_{p+q}(X \overset{L}{\otimes}_R Y)$$

I CUI OMOMORFISMI DI BORDO (∂) SONO LE MAPPE INDOTTE DA $X \overset{L}{\otimes}_R Y \cong P \otimes_R Q \to X \otimes_R Y$ IN OMOLOGIA.

COROLLARIO: SE $\mathrm{Tor}_q^R(X,Y) = 0 \quad q > 0 \Rightarrow X \overset{L}{\otimes}_R Y \cong X \otimes_R Y$

IN ANALOGIA CON QUANTO DEFINITO NEL CASO DELL'A-ALGEBRA B DEFINIAMO:

DEF: SIA $u : R \to S \in \mathrm{Hom}_{sRing}(R,S)$. IL COMPLESSO COTANGENTE DI S SU R E' $\mathbb{L}_{S/R} = \Omega_{P/R} \otimes_P S \in M_S$

DOVE $R \xrightarrow{u} S$ E' LA FATTORIZZAZIONE COFIBRANTE DI u
$\quad cof \hookrightarrow P \twoheadrightarrow A\text{-}fib$

OSS: COME OGGETTO IN $Ho(M_S)$ E' INDIPENDENTE (A MENO DI ISOMORFISMO) DALLA SCELTA DELLA FATTORIZZAZIONE

DEF: $X \in M_S$. IL q-ESIMO GRUPPO DI OMOLOGIA DI S A VALORI IN X E' $D_q(S/R, X) = H_q(\mathbb{L}_{S/R} \overset{L}{\otimes}_S X)$

OSS: • $\mathrm{tor}_q^S(\mathbb{L}_{S/R}, X) = 0 \to \mathbb{L}_{S/R} \overset{L}{\otimes}_S X \cong \mathbb{L}_{S/R} \otimes_S X$

$\to D_q(S/R, X) = H_q(\mathbb{L}_{S/R} \otimes_S X)$

• E' LA GENERALIZZAZIONE DEL CASO $i_A : cA \to cB$, DUNQUE AVREMO LA SEGUENTE SUCCESSIONE SPETTRALE GENERALIZZATA

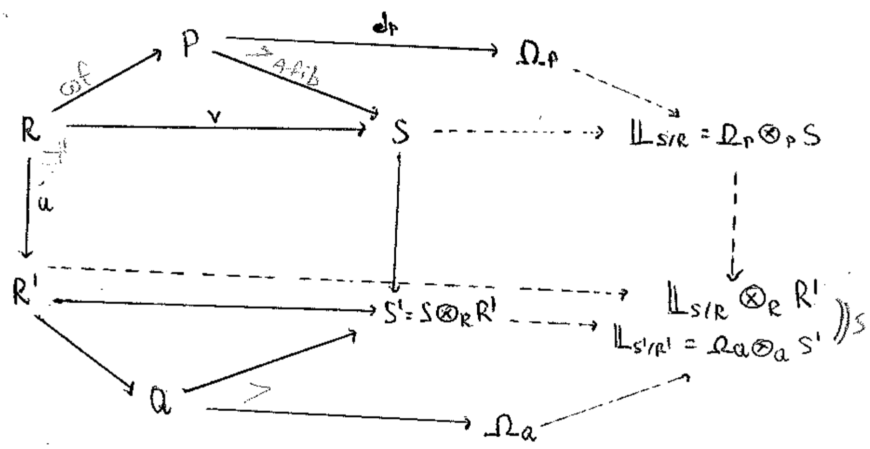
PROPOSIZIONE: E' DATA LA SEGUENTE SUCCESSIONE SPETTRALE:

$$E^2_{pq} = H_p(D_q(S/R) \overset{L}{\otimes}_S X) \Rightarrow D_{p+q}(S/R, X)$$

TEOREMA: $R, R', S \in \mathrm{Obj}(sRing)$. $u : R \to R'$, $v : R \to S$ MAPPE DI ANELLI SIMPLICIALI. $S' = S \otimes_R R'$
SE $\mathrm{Tor}_q^R(R', S) = 0$ PER $q > 0$ ALLORA SONO DATI I SEGUENTI ISOMORFISMI IN $Ho(M_{S'})$:

1) $\mathbb{L}_{S/R} \otimes_R R' \cong \mathbb{L}_{S'/R'}$

2) $\mathbb{L}_{S'/R} \cong (\mathbb{L}_{S/R} \otimes_R R') \oplus (\mathbb{L}_{R'/R} \otimes_R S)$



COROLLARIO: $B, C \in A$ A-ALGEBRE. SE $\mathrm{tor}_q^A(B,C) = 0$ PER $q > 0$. PRESO N $B \otimes_A C$-MODULO, ALLORA:

$$D^q(B \otimes_A C / C, N) = D^q(B/A, N)$$

$$D^q(B \otimes_A C / C, N) = D^q(B/A, N) \oplus D^q(C/A, N)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

OSSERVIAMO CHE NELLE HP PRECEDENTI IL CASO $q=0$ CI DICE CHE $\mathrm{Der}_C(C \otimes_A B, N) \cong \mathrm{DER}_A(B, M)$
MENTRE NEL CASO $q=1$, SE $\mathrm{tor}_1^A(C,B) = 0 \Rightarrow \mathrm{Exalcomm}_C(C \otimes_A B, N) \cong \mathrm{Exalcomm}_A(B, M)$

QUESTA PRIOPRIETA' E' NOTA CON IL NOME DI CAMBIO DI BASE FIACCO