COMPLESSO COTANGENTE

Abbiamo già visto: $B, A \in CRing$, $M \in B\text{-Mod}$ $\quad A \to B$ morfismo

$$\mathrm{Der}_A(B,-) : B\text{-Mod} \to \mathrm{Set}$$

$$M \mapsto \mathrm{Der}_A(B,M) = \{ \underset{A\text{-lineare}}{f : B \to M} \mid f(bb') = f(b)b' + bf(b') \}$$

è rappresentabile: $\exists\ \Omega_{B/A} \in B\text{-Mod}$, $\delta : B \to \Omega_{B/A}$ t.c.

$$\mathrm{Der}_A(B,-) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, -) \quad \text{iso naturale di } B\text{-moduli}$$

$$f \leftrightarrow f \circ \delta$$

e se $A \to B \to C$ sono morfismi di anelli c'è la successione esatta

$$\left(I/I^2 \to \right) \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \quad \text{di } C\text{-moduli}$$

$\uparrow$

(se $C = B/I$, in questo caso si ha pure $\Omega_{C/B} \cong 0$)

vorremmo poter sempre descrivere cosa c'è a sinistra, ma derivare il funtore

$\Omega_{-/A}$, un po' come si fa per $- \otimes_A M$: si passa ai complessi di catene e si lavora lì

Problema: $\Omega_{-/A} : CAlg_A \to Ab$ e $CAlg_A$ non è abeliana!

Idea: come suggerisce Dold-Kan, si può usare $s\mathcal{C}$ invece di $Ch^{\geq 0}(\mathcal{C})$.

C'è la coppia di funtori aggiunti $\quad \pi_0 : sCAlg_A \rightleftarrows CAlg_A : c_*$ ← oggetto simpliciale costante

è fully faithful

Da fare: Come si costruisce una risoluzione?

Chi sono i "proiettivi" in $sCAlg_A$?

Risoluzioni

Due possibilità di lavorare $\nearrow$ "a mano" con varie costruzioni eg. bar, cotriple
$\searrow$ "astratta" con la teoria delle categorie modello

- Omologia cotriple :

$$S_A : \mathrm{Set} \rightleftarrows \mathrm{CAlg}_A : U \quad \text{aggiunti}$$
$$X \mapsto A[x]_{x \in X}$$

(U forgetful)

$\perp = S_A \circ U$ cotriple in CAlg_A $\Rightarrow$ si ottiene un'algebra simpliciale aumentata $\perp_* B \to B$ e mappe canoniche $\perp_n B = \underbrace{\perp \circ \dots \circ \perp}_{n+1 \text{ volte}} B \to B$ $\forall n \ \forall B$

Def $B \in \mathrm{CAlg}_A$. Il complesso cotangente di B su A è il B-modulo simpliciale

$$\mathbb{L}_{B/A} : [n] \longmapsto B \otimes_{\perp_n B} \Omega_{\perp_n B / A}$$

cioè: ① si prende la risoluzione di B data dalla cotriple

② si applica $\Omega_{-/A}$ a ogni livello n

③ si fa $- \otimes B$ per ottenere un B-modulo simpliciale

(④ si fa Dold-Kan per vederlo come complesso di catene)

Oss

$$\mathrm{Hom}_B\left((\mathbb{L}_{B/A})_n, M\right) = \mathrm{Hom}_B\left(B \otimes_{\perp_n B} \Omega_{\perp_n B/A}, M\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\perp_n B}\left(\Omega_{\perp_n B/A}, M\right) \simeq \mathrm{Der}_A(\perp_n B, M)$$

$\forall M \in B\text{-Mod}$, $\forall n$. L'aumentazione $\perp_* B \to B$ induce $\mathbb{L}_{B/A} \to \Omega_{B/A} \otimes_B B \simeq \Omega_{B/A}$
$\Rightarrow H^0(\mathbb{L}_{B/A}) \simeq \Omega_{B/A}$

Oss La risoluzione cotriple non è molto "economica" perché ad ogni passo prendiamo polinomi in infinite variabili, anche se poi magari le omologie ha rango finito

- categorie modello : [vedi AGA 2014/2015]

[Idea: ⊛ la proprietà di sollevamento dei proiettivi può essere usata per definire analoghe classi di oggetti "cofibranti" in categorie non necessariamente abeliane dotate di una nozione di "equivalenza debole" analoga a quelle in Top o in $Ch(A)$ (= quasi-isomorfismo)

Vantaggi: ⊛ Una volta mostrato che $\mathcal{C}$ (= $sCAlg_A$ per esempio) è una categoria modello si ha "gratis" l'esistenza $\forall X \in \mathcal{C}$ di una "risoluzione" cofibrante $\tilde{X} \to X$ (funtoriale)]

Teorema $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$, $\mathcal{C}$ categoria modello generata da cofibrazioni, G commuta con colimiti sequenziali e ogni cofibrazione in $\mathcal{D}$ con la proprietà di sollevamento a sinistra rispetto a tutte le fibrazioni è un'equivalenza debole, dove fibrazioni ed equivalenze deboli in $\mathcal{D}$ sono i morfismi f tali che Gf è risp. fibrazione o equivalenze debole in $\mathcal{C}$, cofibrazioni = LLP(fibrazioni $\cap$ eq. deboli)
Allora $\mathcal{D}$ ha una struttura modello generata da cofibrazioni.

Nel nostro caso:

$$sSet \underset{U}{\overset{Free}{\rightleftarrows}} A\text{-}sMod \underset{U}{\overset{Sym}{\rightleftarrows}} sCAlg_A$$

trasportiamo la struttura modello di sSet via $Sym \circ Free$

e possiamo dire che $\mathbb{L}_{-/A}$ è il funtore derivato sinistro di $\Omega_{-/A}$

[la struttura modello si occupa di fornirci i rimpiazzamenti cofibranti]

• Estensioni :

$B \in CAlg_A$, $M \in B\text{-Mod}$ si può formare una estensione a quadrato nullo di B

$$\begin{tikzcd} B\oplus M \arrow[d, "\pi_1"] \\ B \end{tikzcd} \in CAlg_{A/B} \quad \text{è un'algebra su } B$$

con il prodotto

$$(B\oplus M)\otimes(B\oplus M) \longrightarrow B\oplus M$$
$$(b,m)\otimes(b',m') \longmapsto (bb', bm'+b'm)$$

e inoltre

$$Hom_{CAlg_{A/B}}(C, B\oplus M) \simeq Der_A(C,M) \qquad \text{naturale}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f=(\varepsilon,\alpha)"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & B\oplus M \arrow[d, "\pi_1"] \\ & B \end{tikzcd} \longmapsto \alpha : C \to M$$

è una derivazione per la definizione di prodotto in $B\oplus M$.

Quindi $Hom_{CAlg_{A/B}}(-, B\oplus M)$ è naturalmente un gruppo abeliano $\forall M \in B\text{-Mod}$ e viceversa ogni <u>oggetto abeliano</u> C [i.e. tale che $Hom_{CAlg_{A/B}}(-, C) \in Ab$] in $CAlg_{A/B}$ è isomorfo a $B\oplus M$ per qualche M

$$\Rightarrow \quad B\text{-Mod} \simeq \left(CAlg_{A/B}\right)_{\substack{\text{oggetti}\\ \text{abeliani}}} \hookrightarrow CAlg_{A/B}$$
$$M \longmapsto B\oplus M$$

e $\quad Hom_{CAlg_{A/B}}(C, B\oplus M) \simeq Der_A(C,M) \simeq Hom_A(B\otimes_C \Omega_{C/A}, M)$

Quindi $\quad B\otimes_{-}\Omega_{-/A} : CAlg_{A/B} \rightleftarrows B\text{-Mod} : B\oplus -$

• Proprietà di $\mathbb{L}_{B/A}$

Esempio Se $B = A[x]$ $\Rightarrow$ $\Omega_{B/A} \simeq B\,dx$ e $\mathbb{L}_{B/A} \simeq \Omega_{B/A}$
$A \hookrightarrow B$

Γ $B \xrightarrow{id} B$ si lifta a una risoluzione simpliciale $c_*B \to c_*B$ Γ vale perché $B = \mathrm{Sym}(P)$, $P =$ A-mod proiettivo

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{B/A} := \Omega_{c_*B/A} \otimes_{c_*B} B \simeq c_*(\Omega_{B/A}) \quad ⌟$$

Esempio $A \to B \simeq A/(f)$ f non divisore di zero in A (i.e. $\cdot f : A \hookrightarrow A$)

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{B/A} \simeq B[1]$$

Proposizione $A \to B \to C \in \mathrm{CAlg}$. Allora

$$\mathbb{L}_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B}$$ è una cofiber sequence

Γ i.e. la composizione è nullomotopa e $\mathrm{cone}(\mathbb{L}_{B/A}\otimes_B C \to \mathbb{L}_{C/A}) \underset{weq}{\simeq} \mathbb{L}_{C/B}$ ⌟

e quindi induce una sequenza esatta lunga dei gruppi di coomologia

dim $P \to B$, $P' \to C$ rimpiazzamenti cofibranti, $Z := P' \otimes_P B$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & B \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & C & Z \arrow[l, "\sim"'] \\
& P \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, hook] & P' \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow 0 \to \Omega_{P/A} \otimes_P P' \to \Omega_{P'/A} \to \Omega_{P'/P} \to 0$ è split esatta, applico $- \otimes_{P'} C$

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega_{P/A} \otimes_P C & \to & \Omega_{P'/A} \otimes_{P'} C & \to & \Omega_{P'/P} \otimes_{P'} C \\
\| & & \| & & \downarrow\wr \\
& & & & \Omega_{Z/B} \\
\mathbb{L}_{B/A} \otimes C & \to & \mathbb{L}_{C/A} & &
\end{array}$$

applico $- \otimes_Z C$

$$\begin{array}{c}
\Omega_{P'/P} \otimes_{P'} \\
\downarrow\wr \\
\Omega_{Z/B} \otimes_Z \\
\| \\
\mathbb{L}_{C/B}
\end{array}$$

Def $B \in sCAlg_A$. Un'estensione <u>libera</u> (o ~~semi~~ quasi-libera) di B è un'algebra simpliciale X su A t.c.

- $X_n = B_n[Y_n]$ anello di polinomi su B_n in variabili Y_n
- $s_j(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$ $\forall n$, $\forall\ 0 \le j \le n$
- $B \hookrightarrow X$ è un morfismo di algebre simpliciali

Oss $A \to B \Rightarrow H^0(\mathbb{L}_{B/A}) \simeq \Omega_{B/A}$ (4TER)

$\ulcorner$ $A \to P \xrightarrow{\sim} B$ $\quad \Omega_{-/A}$ è aggiunto sx $\Rightarrow$ preserva colim,

$$\Omega_{B/A} \simeq \Omega_{\mathrm{colim}(P_1 \rightrightarrows P_0)/A} \simeq \mathrm{colim}\left(\Omega_{P_1/A} \rightrightarrows \Omega_{P_0/A}\right) = H^0(\mathbb{L}_{B/A}) \lrcorner$$

Oss (cambio base)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' = B \otimes_A A' \end{tikzcd} \Rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B B' \simeq \Omega_{B'/A'}$$

in generale se
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd} \rightsquigarrow \mathbb{L}_{B/A} \otimes_B B' \to \mathbb{L}_{B'/A'} \quad : \quad \text{fattorizzazione } A \hookrightarrow P \xrightarrow{\sim} B$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & A' \arrow[d, hook] & \\ P \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & A' \otimes_A P \arrow[r, hook] \arrow[d] & P' \arrow[d, "\wr"] \\ B \arrow[r] & B' \arrow[r, equal] & B' \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \Omega_{A'\otimes_A P/A} \otimes_{A' \otimes_A P} P' & \longrightarrow & \Omega_{P'/A} \otimes_P B \\ \| & & \| \\ \mathbb{L}_{B/A} \otimes_B B' & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{L}_{B'/A} \end{array}$$

. Se f o g è piatta $\Rightarrow \alpha$ è equivalenza

$\ulcorner$ g piatta $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & A' \arrow[d] \\ P \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & P \otimes_A A' \arrow[d, "\wr"] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$
$\Leftarrow$ g piatta

$$\Rightarrow \Omega_{P/A} \otimes_P (P \otimes_A A') \xrightarrow{\sim} \Omega_{P\otimes_A A'/A'}$$

e applico $- \otimes_{P \otimes_A A'} B'$ $\Rightarrow \mathbb{L}_{B/A} \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_{B'/A'}$

Tutto ciò può essere fatto "level-wise" in $sCAlg_A$!

Oss Se $\mathrm{char} A = 0$ si può usare Dold-Kan e lavorare in $CdgAlg_A^{\leq 0}$

Γ se $\mathrm{char} A = p$ $\nexists$ struttura modello su $CdgAlg_A^{\leq 0}$ t.c. $W =$ qis

Fib $=$ suriezioni level-wise

$CdgAlg_A^{\leq 0}$ ha la struttura modello trasportata da $dgAlg_A^{\leq 0}$ via Sym_A

$\rightsquigarrow$ abbiamo mapping spaces in $CdgAlg_A^{\leq 0}$. Una descrizione esplicita:

Def $\Delta_A^n := \dfrac{A[t_0, \dots, t_n]}{\left(\sum_i t_i - 1\right)} \in CAlg_A$

Ne facciamo l'algebra di de Rham (algebrica):

$$\Omega_n^{\bullet} := \Lambda^{\bullet} \Omega_{\Delta_A^n / A} \in CdgAlg^{\geq 0}$$

e prendiamo $\forall B \in CdgAlg_A^{\leq 0}$ $\quad B \otimes_A \Omega_n^{\bullet} \in CdgAlg_A$

e ne facciamo il troncato $\tau_{\leq 0}$ (intelligente)

$$\tau_{\leq 0}(B \otimes_A \Omega_n^{\bullet})$$

$\Delta_A^{\bullet} = [n] \mapsto \Delta_A^n$ è un'algebra commutativa simpliciale

$\Rightarrow \Omega_* = [n] \mapsto \Omega_n^{\bullet}$ è un oggetto simpliciale in $CdgAlg_A^{\geq 0}$

$\Rightarrow [n] \longmapsto \tau_{\leq 0}(B \otimes_A \Omega_n) \in sCdgAlg_A^{\leq 0}$

Def $\mathrm{Map}_{CdgAlg_A^{\leq 0}}(B, C) := \mathrm{Hom}_{CdgAlg_A^{\leq 0}}\left(QB, \tau_{\leq 0}(C \otimes_A \Omega_*)\right) \in sSet$

è un mapping space (ben definito in $\mathrm{Ho}(sSet)$) in $CdgAlg_A^{\leq 0}$

$B \to C$ in $\mathrm{cdgAlg}_A^{\leq 0}$, $M \in C\text{-dgMod}$

$$\underline{\mathrm{Der}}^n_B(C,M) := \left\{ f \in \underline{\mathrm{Hom}}^n_B(C,M) \;\middle|\; f(bb') = f(b)b' + (-1)^{n|b|}\, b\, f(b') \right\}$$

mappe B-lineari di complessi di grado n, i.e. $C \to M[n]$

$$f \mapsto d_M f - (-1)^n f d_C$$

$$\underline{\mathrm{Der}}^n_B(C,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Der}}^{n+1}_B(C,M)$$

$\rightsquigarrow \underline{\mathrm{Der}}_B(C,M) \in C\text{-dgMod}$

Proposizione $\underline{\mathrm{Der}}_B(C,M)$ è rappresentato da $\Omega_{C/B} \in C\text{-dgMod}$ via

$$\delta : C \to \Omega_{C/B}$$

MA $\Omega_{-/B}$ non è "homotopy invariant":

$\exists\ C \underset{q.i.}{\simeq} C'$ come B-cdg algebre ma $\Omega_{C/B} \underset{q.i.}{\not\simeq} \Omega_{C'/B}$

[e.g. $B = A[x]$ $\quad C = k[0]$ $\quad C' = (\cdots 0 \to k[t] \xrightarrow{t} k[t] \to \cdots)$, in gradi -1, 0

definiamo $\mathbb{R}\mathrm{Der}_B(C,M) := \mathrm{Map}_{\mathrm{cdgAlg}_{A/B}}(C, B \oplus M)$ lo spazio delle derivazioni derivate

e abbiamo

Teorema $\exists\ \mathbb{L}_{C/B} \in \mathrm{Ho}(B\text{-dgMod})$ e un isomorfismo in $\mathrm{Ho}(\mathrm{sSet})$

$$\mathbb{R}\mathrm{Der}_B(C,M) \simeq \mathrm{Map}_{B\text{-dgMod}}(\mathbb{L}_{C/B}, M)$$

indotto da $\delta \in \pi_0\left(\mathbb{R}\mathrm{Der}_B(C, \mathbb{L}_{C/B})\right)$ [Proposizione 1.2.1.2 HAG-II]

$\mathbb{L}_{C/B}$ è il complesso cotangente di C su B.

Proposizione ⌈HAG II 1.2.16⌋ Valgono gli analoghi di $CAlg_{/A}$: (7)

- $\forall$ $A \to B \to C$ e $cdgAlg^{c}_{/A}$ esiste una cofiber sequence di C-dgMod

$$C \otimes^{\mathbb{L}}_{B} \mathbb{L}_{B/A} \to \mathbb{L}_{C/A} \to \mathbb{L}_{C/B}$$

- $$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "h"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd} \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{B/A} \otimes^{\mathbb{L}}_{B} B' \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/A'}$$ e' un iso in $Ho(B'\text{-dgMod})$

$$\mathbb{L}_{B/A} \otimes^{\mathbb{L}}_{B} B' \oplus \mathbb{L}_{A'/A} \otimes^{\mathbb{L}}_{A'} B' \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/A} \quad \ldots\ldots$$

etc...

MA cosa ci abbiamo guadagnato ???

scorsa lezione: uno "spazio" e' un funtore $F: \mathcal{C}^{op} \to Set$

con $(\mathcal{C}, \tau, P)$ contesto geometrico e varie ipotesi (e.g. F e' un fascio, τ subcanonica, $\exists$ atlante etc...)

$Aff = \left(CAlg_{/A}\right)^{op}$ e' parte del contesto geometrico che definisce schemi e spazi algebrici (come incollamento di schemi affini)

$H^0(\mathbb{L}_{B/A})$ e $H^{-1}(\mathbb{L}_{B/A})$ hanno un'interpretazione in termini di teoria della deformazione dello schema affine $Spec B$ su A, ma $H^{-i}(\mathbb{L}_{B/A})$ generico no: in realta' $\exists$ un contesto geometrico con categoria di "modelli" $dAff = \left(CdgAlg\right)^{co\,op}$

($\exists$ topologia di Grothendieck - su $Ho\, CdgAlg^{co}_{/A}$ -, $\exists$ nozione di mappe lisce, etale...)

e si possono analogamente definire gli schemi derivati come le varieta' su $\mathcal{C} = dAff$.

I gruppi di coomologia di $\mathbb{L}_{B/A}$ trovano allora interpretazione nelle deformazioni "derivate" di Spec B visto come schema affine derivato

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CAlg}_A = (\mathrm{Aff}_A)^{op} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, shift left] & \mathrm{Set} \\
(\mathrm{dAff})^{op} = (\mathrm{CdgAlg}_A) \arrow[u, "H^0", shift left] \arrow[ur, "\mathbb{R}F"'] &
\end{tikzcd}
$$

REFERENZE

- GOERSS, SCHEMMERHORN "Model categories & simplicial methods"
- IYENGAR "André-Quillen homology of commutative algebras"
- SCHÜRG "Deformation theory of commutative algebras"
- TOËN, VEZZOSI "Homotopical Algebraic Geometry II [HAG II]"