TEORIA DELLA DISCESA

- A. Weil
- A. Grothendieck, Séminaire Bourbaki 1959-1960
- " , SGA 1 (Exposé VIII) 1971

La teoria della discesa offre un quadro generale per la trattazione di problemi di incollamento. Più precisamente, si propone di determinare sotto quali condizioni un oggetto possa essere descritto localmente.

Riferimenti:

- A. Vistoli, Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory
- AA. VV., Algebraic Stacks
- M. Olsson, Stacks

In questo seminario, lavoreremo prevalentemente nel contesto degli schemi, e ci concentreremo essenzialmente sulla discesa fedelmente piatta per fasci quasi coerenti

---

Come motivazione alla teoria che presenteremo, vediamo un risultato semplice, conseguenza del fatto essere noto che un fibrato vettoriale è determinato (a meno di isomorfismo canonico) dalle sue funzioni di transizione. Generalizzando, questo risultato ci condurrà al teorema di discesa fedelmente piatta per fasci quasi coerenti.

Sia S uno schema.

Prop. Sia (U_i) un ricoprimento di aperti (di Zariski) di S.

(a) Sia $r \geq 0$ un intero, e siano

$$\sigma_{ij} : \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}|_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_j}^{\oplus r}|_{U_{ij}}$$ isomorfismi ("funzioni di transizione")

t.c.:

$$\begin{cases} \sigma_{ii} = \mathrm{Id} \\ \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik} \quad \text{su } U_{ijk} \end{cases}$$ ("condizioni di cociclo")

Allora esiste $\mathcal{E}$ fascio su S, ed esistono isomorfismi:

$$h_i : \mathcal{E}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$$

tali che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}|_{U_{ij}} \arrow[dd, "\sigma_{ij}"] \\ \mathcal{E}|_{U_{ij}} \arrow[ur, "h_i"] \arrow[dr, "h_j"'] & \\ & \mathcal{O}_{U_j}^{\oplus r}|_{U_{ij}} \end{tikzcd}$$

commuti.

(b) Siano $r, s \geq 0$ interi e siano (σ_{ij}) e (τ_{ij}) rispettivamente:

$$\sigma_{ij} : \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus r}|V_{ij} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{V_j}^{\oplus r}|V_{ij}$$

$$\tau_{ij} : \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus s}|V_{ij} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{V_j}^{\oplus s}|V_{ij}$$

con le proprietà come in (a).

Esse definiscono fasci $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$, con isomorfismi:

$$h_i : \mathcal{E}|V_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus r} \quad \text{e}$$

$$k_i : \mathcal{F}|V_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus s} \quad \text{come sopra.}$$

Dati morfismi:

$$\varepsilon_i : \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus r} \to \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus s} \quad \text{tali che}$$

i diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{V_i}^{\oplus r}|V_{ij} \arrow[r, "\sigma_{ij}"] \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & \mathcal{O}_{V_j}^{\oplus r}|V_{ij} \arrow[d, "\varepsilon_j"] \\
\mathcal{O}_{V_i}^{\oplus s}|V_{ij} \arrow[r, "\tau_{ij}"] & \mathcal{O}_{V_j}^{\oplus s}|V_{ij}
\end{tikzcd}$$

commutino,

esiste un unico morfismo

$$\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$$

tale che i diagrammi:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}|_{U_i} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "h_i"'] & \mathcal{F}|_{U_i} \arrow[d, "k_i"] \\ \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r} \arrow[r, "\varepsilon_i"] & \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus s} \end{tikzcd}$$ commutativo.

Oss. Questo (b) ci dice, in particolare, che al punto (a) la coppia $(\mathcal{E}, (h_i))$ è unica a meno di isomorfismo canonico.

Questo risultato può essere generalizzato al caso di fasci quasi coerenti, come segue:

Prop. Sia (U_i) un ricoprimento di aperti (di Zariski) di S.

(a) Data una famiglia di fasci $(\mathcal{E}_i)$, con $\mathcal{E}_i$ fascio quasi coerente su U_i, e dati isomorfismi: ("funzioni di transizione")

$$\sigma_{ij} : \mathcal{E}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_j|_{U_{ij}} \quad \text{t.c.}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ii} = \mathrm{Id} \\ \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik} \quad \text{su } U_{ijk} \end{cases}$$ ("condizioni di cociclo").

Allora esiste $\mathcal{E}$ fascio quasi coerente su S, ed esistono isomorfismi:

$h_i : \mathcal{E}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_i$ t.c. il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_i|_{U_{ij}} \arrow[d, "\sigma_{ij}"] \\
\mathcal{E}|_{U_{ij}} \arrow[ur, "h_i"] \arrow[dr, "h_j"'] & \\
 & \mathcal{E}_j|_{U_{ij}}
\end{tikzcd}
$$

commuti.

(b) Dati $(\mathcal{E}_i)$ e (σ_{ij}) e $(\mathcal{F}_i)$ e (τ_{ij}) con le proprietà richieste (esistenti), che diano luogo, per il punto (a) a $\mathcal{E}$ con (h_i) e $\mathcal{F}$ con (k_i), allora dati morfismi:

$\varepsilon_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}_i$ t.c.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_i|_{U_{ij}} \arrow[r, "\sigma_{ij}"] \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & \mathcal{E}_j|_{U_{ij}} \arrow[d, "\varepsilon_j"] \\
\mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \arrow[r, "\tau_{ij}"] & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}
\end{tikzcd}
$$

commuti

allora esiste un unico morfismo

$\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ t.c.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}|_{U_i} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "h_i"'] & \mathcal{F}|_{U_i} \arrow[d, "k_i"] \\
\mathcal{E}_i \arrow[r, "\varepsilon_i"] & \mathcal{F}_i
\end{tikzcd}
$$

commuti.

Oss. Anche in questo caso, per il punto (b), abbiamo che le coppie $(\mathcal{E}, (h_i))$ ottenute al punto (c) è unica a meno di isomorfismo canonico.

Riformuliamo quest'ultima proposizione:

(a) siano $S' = \coprod U_i$, $f : S' \to S$ il morfismo naturale, $\mathcal{E}'$ il fascio definito da $(\mathcal{E}_i)$ su S', $S'' = S' \times_S S'$, $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$, con le proiezioni: $p_i : S'' \to S'$, $i = 1, 2$

$p_{ij} : S''' \to S''$, $(ij) = 12, 13, 23$

Le "funzioni di transizione" ~~[illegible]~~ danno luogo ad un isomorfismo:

$$\sigma : p_1^* \mathcal{E}' \xrightarrow{\cong} p_2^* \mathcal{E}'$$

che soddisfa le "condizioni di cocicle":

$$p_{23}^*(\sigma) \circ p_{12}^*(\sigma) = p_{13}^*(\sigma),$$ ovvero:

$$\begin{tikzcd}
p_{13}^* p_1^* \mathcal{E}' \arrow[rr, "p_{13}^*(\sigma)"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & & p_{13}^* p_2^* \mathcal{E}' \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
p_{12}^* p_1^* \mathcal{E}' \arrow[dr, "p_{12}^*(\sigma)"'] & & p_{23}^* p_2^* \mathcal{E}' \\
& p_{12}^* p_2^* \mathcal{E}' \cong p_{23}^* p_1^* \mathcal{E}' \arrow[ur, "p_{23}^*(\sigma)"'] &
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

La tesi è che esiste $\mathcal{E}$ fascio quasi coerente su S, ed esiste un isomorfismo $h : f^*\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}'$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
p_1^* f^* \mathcal{E} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "p_1^* h"'] & p_2^* f^* \mathcal{E} \arrow[d, "p_2^* h"] \\
p_1^* \mathcal{E}' \arrow[r, "\sigma"] & p_2^* \mathcal{E}'
\end{tikzcd}$$

commuti.

(b) Dati $(\mathcal{E}', \sigma)$ e $(\mathcal{F}', \tau)$ come in (a),

per ogni morfismo:

$\varepsilon' : \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
p_1^* \mathcal{E}' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_1^* \varepsilon'"'] & p_2^* \mathcal{E}' \arrow[d, "p_2^* \varepsilon'"] \\
p_1^* \mathcal{F}' \arrow[r, "\tau"] & p_2^* \mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

commuti

esiste un unico morfismo

$\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
f^* \mathcal{E} \arrow[r, "f^* \varepsilon"] \arrow[d, "h"'] & f^* \mathcal{F} \arrow[d, "k"] \\
\mathcal{E}' \arrow[r, "\varepsilon'"] & \mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

commuti,

dove $(\mathcal{E}, h)$ e $(\mathcal{F}, k)$ sono dati applicando

(a) alle coppie $(\mathcal{E}', \sigma)$ e $(\mathcal{F}', \tau)$.

Vogliamo generalizzare ulteriormente questo risultato sostituendo a S' uno schema qualunque, e $f: S' \to S$ un morfismo di schemi con date proprietà e a $\mathcal{E}'$ un fascio quasi coerente su S'.

Le proprietà che dovremo richiedere su f sono: fpqc o fppf. Chiariamone il significato:

Digressione: $f: X \to Y$ morfismo di schemi. Si dice:

- piatto se $\forall x \in X$ l'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ è un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-modulo piatto.
- fedelmente piatto se è piatto e suriettivo
- localmente di presentazione finita se $\forall x \in X$ $\exists U \subseteq X$ aperto affine, $x \in U$ $\exists V \subseteq Y$ aperto affine, $f(U) \subseteq V$ t.c. $\mathcal{O}_X(U)$ è finitamente presentato su $\mathcal{O}_Y(V)$
- quasi compatto se le controimmagine

mediante f di un aperto quasi compatto è un quasi compatto

- **fppf** se è fedelmente piatto e localmente di presentazione finita.

- **fpqc** (secondo Kleiman) se è fedelmente piatto e se ogni aperto quasi compatto di Y è immagine mediante f di un aperto quasi compatto di X.

OSS. Nella definizione di fpqc non richiediamo che f sia fedelmente piatto quasi compatto, come saremmo naturalmente tentati di fare, per ragioni che risulteranno chiare in seguito, quando definiremo la topologia fpqc.

Topologie su (Sch) (categoria degli schemi)

(a) Topologia di Zariski

Dato $X \in (Sch)$, un ricoprimento di Zariski di X è una famiglia $(U_i \to X)$ di immersioni aperte (nel senso che l'immagine di ogni U_i in X è un sottoschema aperto di X) t.c. l'applicazione indotte $\coprod U_i \to X$ sia suriettiva

(b) Topologia étale

Dato $X \in (Sch)$, un ricoprimento étale di X è una famiglia $(U_i \to X)$ di morfismi étale (ovvero, ad esempio, piatti e non ramificati) t.c. $\coprod U_i \to X$ sia suriettiva

(c) Topologia fppf

Dato $X \in (Sch)$, un ricoprimento fppf di X è una famiglia $(U_i \to X)$ di morfismi piatti e localmente di presentazione finita t.c. $\coprod U_i \to X$ sia suriettiva

(d) Topologia fpqc

Dato $X \in (Sch)$, un ricoprimento fpqc di X è una famiglia $(U_i \to X)$ di morfismi t.c. $\coprod U_i \to X$ sia fpqc.

OSS. $X \in (Sch)$.

$$(U_i \to X) \text{ Zariski} \Rightarrow \text{étale} \Rightarrow \text{fppf} \Rightarrow \text{fpqc}.$$

Dunque, possiamo affermare che la topologia fpqc è "più fine" della topologia fppf, che è più fine della topologia étale, e sua volta più fine della topologia di Zariski. La definizione di Kleiman, contrariamente alla definizione naïf di fpqc garantisce la validità dell'ultima implicazione.

Ed ora un po' di terminologia:

Siano S e S' schemi, $f: S' \to S$ un morfismo fppf o fpqc. Con le notazioni dell'ultima versione del teorema di discesa, diremo:

- la coppia $(\mathcal{E}', \sigma)$, con $\mathcal{E}'$ fascio quasi coerente su S', e $\sigma: p_1^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\cong} p_2^*\mathcal{E}'$ isomorfismo che verifica la condizione di cociclo: $p_{23}^*(\sigma) \circ p_{12}^*(\sigma) = p_{13}^*(\sigma)$, un <u>dato di discesa</u> (per fasci quasi coerenti)
- la coppia $(\mathcal{E}, h)$, con $\mathcal{E}$ fascio quasi coerente su S e $h: f^*\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}'$ isomorfismo t.c. $\sigma \circ p_1^* h = p_2^* h$, <u>soluzione</u> del problema di discesa definito dal dato di discesa $(\mathcal{E}', \sigma)$.
- il morfismo $\varepsilon': \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$, t.c. $\tau \circ p_1^*\varepsilon' = p_2^*\varepsilon' \circ \sigma$, dove $(\mathcal{E}', \sigma)$ e $(\mathcal{F}', \tau)$ sono dati di discesa, un <u>morfismo di dati di discesa</u>

Il teorema può dunque essere enunciato così:

<u>Teorema</u> (discesa fedelmente piatta per fasci quasi coerenti) Siano S e S' schemi, e sia $f: S' \to S$ fppf o fpqc.

(a) assegnato un dato di discesa $(\mathcal{E}', \sigma)$ per fasci quasi coerenti esiste una soluzione $(\mathcal{E}, h)$ del corrispondente problema

(b) assegnati $(\mathcal{E}', \sigma)$ e $(\mathcal{F}', \tau)$ dati di discesa, con soluzioni dei corrispondenti problemi rispettivamente $(\mathcal{E}, h)$ e $(\mathcal{F}, K)$, per ogni morfismo $\varepsilon' : \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$ di dati di discesa esiste un unico morfismo $\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ t.c.

$$\varepsilon' \circ h = K \circ f^* \varepsilon$$

Vedremo come questo risultato possa essere enunciato in una versione più elegante. Per prima, diamo un'idea della dimostrazione nel caso affine.

Dim. (idea, caso affine)

(a) $S = \operatorname{Spec} A$, $S' = \operatorname{Spec} A'$,

$\varphi : A \to A'$ fedelmente piatto. (ovvero A' è un A-modulo fedelmente piatto, e $\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ è suriettiva).

Possiamo supporre $\mathcal{E}' = \widetilde{M'}$, con M' un A'-modulo.

Siano, poi: $A'' = A' \otimes_A A'$, $A''' = A' \otimes_A A' \otimes_A A'$,

con $q_i : A' \to A''$, $i = 1, 2$, e $q_{ij} : A'' \to A'''$, con $(ij) = 12, 13, 23$

Sia, poi, $s : M' \otimes_A A' \xrightarrow{\cong} A' \otimes_A M'$ l'isomorfismo che corrisponde a σ. Per definire $\mathcal{E}$ ed h è sufficiente definire:

$$M = \{ u \in M' \mid s(u \otimes 1) = 1 \otimes u \}$$

$$\eta : A' \otimes_A M \to M', \quad (x \otimes u) \longmapsto x \cdot u$$

(b) omessa

$\square$

Passiamo ad una formulazione categoriale della teoria della discesa.

Sia $\mathcal{D}$ una categoria nella quale esistono i prodotti fibrati, e sia $\mathcal{C}(-) : \mathcal{D}^{op} \to (\mathrm{Cat})$ un 2-funtore lasco.
Scriviamo f^* in luogo di $\mathcal{C}(f)$, per f morfismo di $\mathcal{D}$.
Siano $X, Y \in \mathcal{D}$, e sia $f : X \to Y$ un morfismo. Vogliamo definire la categoria dei dati di discesa $\mathcal{C}(X \xrightarrow{f} Y)$.

Def. • Gli oggetti di $\mathcal{C}(X \xrightarrow{f} Y)$ sono le coppie $(\mathcal{E}', \sigma)$, dove $\mathcal{E}' \in \mathcal{C}(X)$ e $\sigma : p_1^* \mathcal{E}' \xrightarrow{\cong} p_2^* \mathcal{E}'$ è un isomorfismo che verifica la condizione di cociclo: $p_{23}^*(\sigma) \circ p_{12}^*(\sigma) = p_{13}^*(\sigma)$

(al solito $X'' = X \times_Y X$, $X''' = X \times_Y X \times_Y X$, e $p_i : X'' \to X$, $i = 1, 2$, $p_{ij} : X''' \to X''$, $(ij) = 12, 13, 23$)

• I morfismi fra $(\mathcal{E}', \sigma)$ e $(\mathcal{F}', \tau)$ dati di discesa sono morfismi $\varepsilon : \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$ in $\mathcal{C}(X)$ t.c. $\tau \circ p_1^* \varepsilon' = p_2^* \varepsilon' \circ \sigma$

Oss. Sia $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(Y)$. Allora, la coppia $(f^* \mathcal{E}, \mathrm{can})$, dove $\mathrm{can} : p_1^* f^* \mathcal{E} \cong (f \circ p_1)^* \mathcal{E} = (f \circ p_2)^* \mathcal{E} \cong p_2^* f^* \mathcal{E}$, è un dato di discesa.
Dunque, è definito un funtore:
$$f^* : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X \xrightarrow{f} Y).$$

Un risultato di teoria della discesa, in generale, afferma che, sotto determinate condizioni su f, il funtore f^* è un'equivalenza di categorie. È il caso della discesa fedelmente piatta per fasci quasi coerenti:

<u>Esempio</u>: $\mathcal{D} = (Sch)$, $\mathcal{C}(-) = QCoh(-)$. Il teorema può essere riformulato nel modo seguente:

<u>Teorema</u> (discesa fedelmente piatta per fasci quasi coerenti)

S, S' schemi, $f : S' \to S$ fppf o fpqc.

Allora: $f^* : QCoh(S) \to QCoh(S' \xrightarrow{f} S)$

è un'equivalenza di categorie.

Dim. • f^* essenzialmente suriettivo: è il punto (a)

• f^* pienamente fedele: è il punto (b) $\square$

<u>Altri risultati di teoria della discesa</u>

- Fasci localmente liberi su schemi
- Fasci su un sito
- Moduli di curve: $\mathcal{D} = (Sch)$, $\mathcal{C}(-) = \mathcal{M}_g(-)$,

dove, se $S \in (Sch)$, gli oggetti di $\mathcal{M}_g(S)$ sono famiglie proprie e lisce su S di curve algebriche connesse di genere g, e i morfismi sono gli stessi della categoria degli schemi su S.

In questo caso, abbiamo che $\mathcal{M}_g(S) \xrightarrow{f^*} \mathcal{M}_g(S' \xrightarrow{f} S)$ è un'equivalenza di categorie se f è fpqc (vs $\mathcal{M}_g$ come stack)