PARTIAMO DA UNA DEFINIZIONE NOTA A TUTTI MA FONDAMENTALE IN CIO' CHE ANDREMO A VEDERE PIU' AVANTI

<u>DEF</u>: DATI DUE FUNTORI $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{D}$, UNA <u>TRASFORMAZIONE NATURALE</u> DA F A G E' $\alpha : F \to G$ TALE CHE $\forall c, d \in Obj(\mathcal{C})$, $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$ $\quad Gf \circ \alpha_c = \alpha_d \circ Ff$

CHE TRADOTTO IN DIAGRAMMI SI ESPRIME TRAMITE IL SEGUENTE QUADRATO COMMUTATIVO

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathbb{D} \end{tikzcd} \quad \to \quad \begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fd \arrow[r, "\alpha_d"] & Gd \end{tikzcd}$$

LO STUDIO DELLA TEORIA DELLE CATEGORIE SI BASA SU "UNIVERSALI" CHE SONO SOSTANZIALMENTE DEI DIAGRAMMI CHE COMMUTANO. SPESSO LA "FRECCIA CHE COMPLETA IL DIAGRAMMA" E' UNICA.

PIU' O MENO OGNI PROPRIETA' PUO' ESSERE ESPRESSA ATTRAVERSO LE FRECCE UNIVERSALI. VEDIAMO LA DEFINIZIONE:

<u>DEF</u>: DATO UN FUNTORE $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ E $c \in Obj(\mathcal{C})$, UNA <u>FRECCIA UNIVERSALE</u> DA c A F E' UNA COPPIA $(R, u) \in Obj(\mathbb{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(c, FR)$ t.c. $\forall S \in Obj(\mathbb{D})$, $\forall w \in Hom_{\mathcal{C}}(c, FS)$ $\exists ! f \in Hom_{\mathbb{D}}(R,S)$ t.c. $u = Ff \circ w$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} & \\ R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists ! f"'] & FR \arrow[d, dashed, "Ff"] & \\ S \arrow[r] & FS & c \arrow[ul, "u"'] \arrow[l, "w"] \end{tikzcd}$$

<u>ESEMPIO</u>: SIA $VECT_{\mathbb{K}}$ LA CATEGORIA DEGLI SPAZI VETTORIALI SU CAMPO $\mathbb{K}$ FISSATO. SIA $U : Vect_{\mathbb{K}} \longrightarrow Set$ IL FUNTORE DIMENTICANTE.

DETTO V_X LO SPAZIO VETTORIALE I CUI ELEMENTI SONO COMBINAZIONI FORMALI DEGLI ELEMENTI DI $X \in Obj(Set)$ OSSERVIAMO CHE (V_X, j) E' FRECCIA UNIVERSALE DA X A U. $\left(\text{CON } j : X \to V_X \to U(V_X) \right)$

$$\begin{tikzcd} Vect_{\mathbb{K}} \arrow[r, "U"] & Set & \\ V_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists ! g"'] & U(V_X) \arrow[d, dashed, "Ug"] & \\ W \arrow[r] & U(W) & X \arrow[ul, "j"'] \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

INFATTI $\forall W \in Obj(Vect_{\mathbb{K}})$, $\forall f \in Hom_{Set}(X, U(W))$ POSSIAMO COSTRUIRE UN'UNICA $g \in Hom_{Vect_{\mathbb{K}}}(V_X, W)$ t.c. $Ug \circ j = f$

DEFINITA COSI':
$$g : V_X \longrightarrow W$$
$$\sum c_i x_i \longrightarrow \sum c_i f(x_i)$$

SPESSO IN ALTRI CONTESTI VENGONO UTILIZZATE DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI FRECCE UNIVERSALI A PATTO DI RINUNCIARE AD ALCUNE PROPRIETA' DELLA CATEGORIA DI PARTENZA.

AD ESEMPIO SE LA CATEGORIA DI PARTENZA HA HOM-INSIEMI PICCOLI POSSIAMO DEFINIRE IL SEGUENTE OGGETTO

<u>DEF</u>: DATO $F : \mathbb{D} \to Set$, UN <u>ELEMENTO UNIVERSALE</u> E' UNA COPPIA $(R, e) \in Obj(\mathbb{D}) \times FR$ t.c.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "F"] \arrow[d, dashed, "\exists ! f"'] & e \in FR \arrow[d, "Ff"] \\ S \arrow[r, "F"] & g \in FS \end{tikzcd}$$

$\forall S \in Obj(\mathbb{D})$, $\forall g \in FD$ $\exists ! f \in Hom_{\mathbb{D}}(R, D)$ t.c. $Ff : FR \longrightarrow FD$
$$e \longmapsto g$$

PROPOSIZIONE: ELEMENTO UNIVERSALE $\Rightarrow$ FRECCIA UNIVERSALE

DIM: SIA $\{*\} \in Obj(Set)$. SIA $u \in Hom_{set}(\{*\}, FR)$ t.c. $u(*) = e$. ALLORA LA COPPIA (R, w) E' UNA FRECCIA UNIVERSALE DA $\{*\}$ A F POICHE' IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTA

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "F"] \arrow[d, dashed, "\exists ! f"'] & FR \arrow[d, dashed, "Ff"'] \arrow[d, phantom, "e \overset{Ff}{\mapsto} g", shift left=6] & \{*\} \arrow[l, "u"'] \arrow[dl] \\ D \arrow[r] & FD & \end{tikzcd}$$

$\square$ c.v.d.

VEDIAMO ORA UN FAMOSO ESEMPIO DI COSTRUZIONE COME ELEMENTO UNIVERSALE

ESEMPIO: SIA $S \in Obj(Set)$ E $\sim$ UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA.

SIA $H : Set \longrightarrow Set$
$X \longmapsto \{f : S \to X \mid s \sim s' \Rightarrow fs = fs'\}$

SIA $\pi : S \longrightarrow S/_\sim$
$s \longmapsto [s]_\sim$

LA COPPIA $(S/_\sim, \pi)$ E' ELEMENTO UNIVERSALE DI H. INFATTI

$$\begin{tikzcd} S/_\sim \arrow[r, "H"] \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] & \{f : S \to S/_\sim \mid s \sim s' \Rightarrow fs = fs'\} \arrow[d, dashed, "Hh"] \ni \pi \\ X \arrow[r, "H"] & \{f : S \to X \mid s \sim s' \Rightarrow fs = fs'\} \ni g \end{tikzcd}$$

E' IL CLASSICO DIAGRAMMA

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ S/_\sim \arrow[ur, dashed, "\exists ! h"'] & \end{tikzcd}$$

MOSTRIAMO ORA UNA PROPOSIZIONE CHE CI SARA' UTILE PIU' AVANTI LA CUI DIMOSTRAZIONE E' A pag 59 DEL categories for the working mathematican DI Mac Lane

PROPOSIZIONE: $\forall S : \mathbb{D} \to \mathcal{C}$, $\forall c \in Obj(\mathcal{C})$,

(R, w) FRECCIA UNIVERSALE $\Leftrightarrow$ $Hom_{\mathbb{D}}(R, D) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{C}}(c, SD)$ $\forall D \in Obj(\mathbb{D})$
$f' \longmapsto Sf' \circ u$

QUESTA PROPOSIZIONE CI PERMETTE DI CARATTERIZZARE LE FRECCIE UNIVERSALI COME ISOMORFISMI TRA GLI hom-INSIEMI. E' POSSIBILE FARE LO STESSO CON LE TRASFORMAZIONI NATURALI.
DIMOSTRIAMO ORA IL LEMMA DI YONEDA (STIAMO SUPPONENDO CHE LE CATEGORIE ABBIANO HOM-INSIEMI PICCOLI)

LEMMA DI YONEDA: SIA $F : \mathbb{D} \longrightarrow Set$ FUNTORE $\Rightarrow \forall R \in Obj(\mathbb{D})$ $Nat(Hom_{\mathbb{D}}(R, -), F) \simeq FR$

DIM: SIA $y : Nat(Hom_{\mathbb{D}}(R, -), F) \longrightarrow FR$
$\alpha \longmapsto \alpha_R 1\!\!1_R$

POICHE' α TRASFORMAZIONE NATURALE $\Rightarrow \forall D \in Obj(\mathbb{D}), \forall f \in Hom_{\mathbb{D}}(R, D)$ IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTA

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbb{D}}(R, R) \arrow[r, "\alpha_R"] \arrow[d, "Hom_{\mathbb{D}}(R,-) f"] & FR \arrow[d, "Ff"] \\ Hom_{\mathbb{D}}(R, D) \arrow[r] & FD \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} 1\!\!1_R \arrow[r] \arrow[d] & \alpha_R 1\!\!1_R \arrow[d] \\ f \arrow[r] & \alpha_D f \end{tikzcd}$$

CIOE' y E' BIETTIVA

$\square$ c.v.d.

COROLLARIO: $\forall R,S \in Obj(\mathbb{D})$, $\forall \alpha : Hom_{\mathbb{D}}(R,-) \to Hom_{\mathbb{D}}(S,-)$ $\exists!\, h \in Hom_{\mathbb{D}}(S,R)$ t.c. $\alpha \simeq Hom_{\mathbb{D}}(h,-)$

CIOE'

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, bend left=50, "Hom_{\mathbb{D}}(S{,}-)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "Hom_{\mathbb{D}}(R{,}-)"'{name=D}] & Set \arrow[from=D, to=U, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} S \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ R \end{tikzcd} \quad \text{t.c. } \alpha \simeq Hom_{\mathbb{D}}(h,-)$$

TORNIAMO ORA ALLE FRECCE UNIVERSALI. DIAMO UN PAIO DI DEFINIZIONI NOTE

DEF: DATI $A,B \in Obj(\mathcal{C})$, IL <u>COPRODOTTO</u> E' UNA FRECCIA UNIVERSALE DA $(A,B) \in \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ A $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$
E SI INDICA CON $(A \amalg B, (i,j))$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A\amalg B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & (A\amalg B, A\amalg B) \arrow[d, dashed, "\Delta f"] & \\ D \arrow[r] & (D,D) & (A,B) \arrow[ul, "(i,j)"'] \arrow[l, "(f,g)"] \end{tikzcd} \quad \text{CIOE'} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A\amalg B \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & B \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

DEF: DATO $F \in Obj(\mathcal{C}^J)$, IL <u>COLIMITE</u> DI F E' UNA FRECCIA UNIVERSALE DA F A $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$
E SI INDICA CON $(\mathrm{colim}\, F, u) \in Obj(\mathcal{C}) \times Hom_{\mathcal{C}^J}(F, \Delta\mathrm{colim}) \simeq Obj(\mathcal{C}) \times Nat(J,\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{C}^J \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{colim}\, F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \Delta\mathrm{colim} \arrow[d, dashed, "\Delta f"] & \\ D \arrow[r] & \Delta D & F \arrow[ul, "u"'] \arrow[l, "w"] \end{tikzcd} \quad \text{CIOE'} \quad \begin{tikzcd}[row sep=large] J \arrow[r, bend left=60, "\Delta D"{name=T}] \arrow[r, "\Delta\mathrm{colim}"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "F"'{name=B}] & \mathcal{C} \arrow[from=B, to=M, Rightarrow, "u"] \arrow[from=M, to=T, Rightarrow, dashed, "\Delta f"] \end{tikzcd}$$

IL CUI DIAGRAMMA VIENE: $\forall i,j \in Obj(J)$, $\forall \varphi \in Hom_J(i,j)$

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "w_i"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[dd, "F\varphi"'] & & \Delta D_i \arrow[dd, "\Delta D\varphi"] \\ & \Delta\mathrm{colim}\, i \arrow[ur, dashed, "\Delta f_i"] \arrow[d, "\Delta\mathrm{colim}\,\varphi"] & \\ & \Delta\mathrm{colim}\, j \arrow[dr, dashed, "\Delta f_j"] & \\ F_j \arrow[ur, "u_j"] \arrow[rr, "w_j"'] & & \Delta D_j \end{tikzcd}$$

CHE COMMUTA POICHE' $\Delta\mathrm{colim}\, i \simeq \mathrm{colim} \simeq \Delta\mathrm{colim}\, j$
E $\Delta D_i \simeq D \simeq \Delta D_j$

E' POSSIBILE DARE LA DEFINIZIONE DI COLIMITE ANCHE PASSANDO ATTRAVERSO I CONI

DEF: DATO $F : J \to \mathcal{C}$, $c \in Obj(\mathcal{C})$, UN <u>CONO</u> DALLA BASE F A c E' $\mu = \{\mu_i\}_{i\in Obj(J)} \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(F_i, c)$
$\forall i,j \in Obj(J)$, $\forall \varphi \in Hom_J(i,j)$ $\quad \mu_i = \mu_j \circ F\varphi$

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "F\varphi"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & & F_j \arrow[dl, "\mu_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE $(\operatorname{colim} F, u)$ COLIMITE $\Leftrightarrow$ u CONO DI BASE F A $\operatorname{colim} F$ t.c. $\forall \mu$ CONO DA F A D $\exists!\, h \in Hom_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} F, D)$ t.c. $\forall i \in Obj(J)$ $\mu_i = h \circ u_i$

DIM: BASTA OSSERVARE CHE LA SECONDA PARTE EQUIVALE A RICHIEDERE CHE IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTI $\forall i,j \in Obj(J)$, $\forall \varphi \in Hom_J(i,j)$

$$
\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "F\varphi"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[ddr, "\mu_i"'] & & F_j \arrow[dl, "u_j"'] \arrow[ddl, "\mu_j"] \\
& \operatorname{colim} F \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & \\
& D &
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[ddd, "F\varphi"'] & & \Delta D_i \arrow[ddd, "\Delta D\varphi"] \\
& \Delta \operatorname{colim}_i \arrow[ur, "h_i"] \arrow[d] & \\
& \Delta \operatorname{colim}_j \arrow[dr, "h_j"] & \\
F_j \arrow[ur, "u_j"] \arrow[rr, "\mu_j"'] & & \Delta D_j
\end{tikzcd}
$$

$\square$ c.v.d.

ESEMPIO: SIA $J = \{1 \to 2 \to 3 \to \cdots\}$, $\mathcal{C} = Set$, $F : J \longrightarrow \mathcal{C}$

$i \longmapsto F_i$

"$\to$" $\longmapsto$ "$\subseteq$"

$$\Rightarrow \operatorname{colim} F = \bigcup_{i \in Obj(J)} F_i$$

ESEMPIO: SIA $J = \{1, 2\}$, $F : J \longrightarrow \mathcal{C}$

$1 \longmapsto a$

$2 \longmapsto b$

$$\Rightarrow \operatorname{Colim} F = a \amalg b$$

E' POSSIBILE AVERE LE DEFINIZIONI DUALI DI FRECCE UNIVERSALI IN MODO DA DARE UNA DEFINIZIONE DI LIMITI

DEF: DATO UN FUNTORE $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ E $c \in Obj(\mathcal{C})$, UNA COFRECCIA UNIVERSALE DA F A c E' UNA COPPIA $(R, u) \in Obj(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(FR, c)$ t.c. $\forall S \in Obj(\mathcal{D})$, $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(FD, c)$ $\exists!\, h \in Hom_{\mathcal{D}}(S, R)$ t.c. $f = u \circ Fh$

$$
\mathcal{D} \xrightarrow{\ F\ } \mathcal{C}
$$

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r] & FR \arrow[dr, "u"] & \\
& & c \\
S \arrow[uu, dashed, "\exists! h"] \arrow[r] & FS \arrow[uu, "Fh"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

ANALOGAMENTE E' POSSIBILE DEFINIRE IL PRODOTTO COME:

DEF: DATI $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, IL PRODOTTO DI A E B E' UNA COFRECCIA UNIVERSALE $(A \sqcap B, (\pi_1 \pi_2))$ DAL FUNTORE $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ALL'OGGETTO $(A, B) \in Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$

$$
\begin{tikzcd}
A \sqcap B \\
D \arrow[u, dashed, "\exists! h"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (A, B) & \\
& (A \sqcap B, A \sqcap B) \arrow[u, "\pi_1\ \pi_2"] & \\
& (D, D) \arrow[u, "\Delta h"] \arrow[uu, bend left=80, "f_2"'] \arrow[uu, bend right=80, "f_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad \text{CIOE'} \qquad
\begin{tikzcd}
A & A \sqcap B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& D \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

DEF: DATO $F \in Ob_i(\mathcal{C}^J)$, IL <u>LIMITE</u> DI F È UNA CO FRECCIA UNIVERSALE DA $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ A F

E SI INDICA CON $(\lim F, u) \in Ob_i(\mathcal{C}) \times Hom_{\mathcal{C}^J}(F, \Delta \lim F) \simeq Ob_i(\mathcal{C}) \times Nat(J, \mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\Delta"] & & \Delta \mathcal{C} = \mathcal{C}^J & \\
\lim F \arrow[rr] & & \Delta \lim F \arrow[r, "u"] & F \\
D \arrow[rr] \arrow[u, dashed, "\exists! h"] & & \Delta D \arrow[u, dashed, "\Delta h"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

CIOÈ

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[rr, bend left=50, "\Delta D"] \arrow[rr, "\Delta \lim F" description] \arrow[rr, bend right=50, "F"'] & & \mathcal{C}
\end{tikzcd} \qquad \Downarrow \mu, \ \Downarrow \Delta h, \ \Downarrow u$$

IL CUI DIAGRAMMA È t.c. $\forall i, j \in Ob_i(J)$, $\forall \varphi \in Hom_J(i, j)$ COMMUTA

$$\begin{tikzcd}
F_i & & \Delta D_i \arrow[ll, "\Delta h_i"'] \arrow[dl, dashed, "\mu_i"'] \arrow[dd, "\Delta D \varphi"] \\
& \Delta \lim F_i \arrow[ul, "u_i"'] \arrow[d, "\Delta \lim \varphi"] & \\
& \Delta \lim F_j \arrow[dl, "u_j"'] & \\
F_j & & \Delta D_j \arrow[ll, "\Delta h_j"] \arrow[ul, dashed, "\mu_j"]
\arrow[from=1-1, to=4-1, "F\varphi"']
\end{tikzcd}$$

CHE COMMUTA POICHÈ $\Delta \lim F_i \simeq \lim F \simeq \Delta \lim F_j$ E $\Delta D_i \simeq D \simeq \Delta D_j$

DIAMO ORA LA DEFINIZIONE DI COCONI, IN MODO DA COMPLETARE IN ANALOGIA CON I COLIMITI

DEF: DATO $F : J \to \mathcal{C}$, $c \in Ob_i(\mathcal{C})$, UN <u>COCONO</u> ALLA BASE F DA C È $\mu = \{\mu_i\}_{i \in Ob_i(J)} \in Hom(c, F_i)$

t.c. $\forall i, j \in Ob_i(J)$, $\forall \varphi \in Hom_J(i, j)$, $\mu_j = F\varphi \circ \mu_i$

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "F\varphi"] & & F_j \\
& c \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>PROPOSIZIONE:</u> $(\lim F, u)$ LIMITE $\Leftrightarrow$ u CONO ALLA BASE F DA $\lim F$ t.c. $\forall \mu$ CONO A F DA D $\exists! h \in Hom_{\mathcal{C}}(D, \lim F)$ t.c. $\forall i \in Ob_i(J)$ $\mu_i = h \circ u_i$

<u>DIM:</u> BASTA OSSERVARE CHE I DUE DIAGRAMMI SONO EQUIVALENTI

$$\begin{tikzcd}
F_i & & \Delta D_i \arrow[ll, "\Delta h_i"'] \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dd, "\Delta D \varphi"] \\
& \Delta \lim F_i \arrow[ul, "u_i"'] \arrow[d, "\Delta \lim F\varphi"] & \\
& \Delta \lim F_j \arrow[dl, "u_j"'] & \\
F_j & & \Delta D_j \arrow[ll, "\Delta h_j"] \arrow[ul, "\mu_j"]
\arrow[from=1-1, to=4-1, "F\varphi"']
\end{tikzcd}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "F\varphi"] & & F_j \\
& \lim F \arrow[ul, "u_i"] \arrow[ur, "u_j"'] & \\
& D \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[uul, "\mu_i"] \arrow[uur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$ <u>c.v.d.</u>

PER INTRODURRE IL NUOVO CONCETTO RIPRENDIAMO L'ESEMPIO SUGLI SPAZI VETTORIALI.

ABBIAMO DUE CATEGORIE, Set E $Vect_k$ CHE SONO COLLEGATE DA $U \in Set^{Vect_k}$ IL FUNTORE DIMENTICANTE E DA $V \in Vect_k^{Set}$ IL FUNTORE CHE AD OGNI INSIEME ASSOCIA LO SPAZIO VETTORIALE DEGLI ELEMENTI CHE SONO COMBINAZIONI LINEARI FORMALI.

$$\begin{tikzcd} Vect_k \arrow[r, shift left, "U"] & Set \arrow[l, shift left, "V"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V_X \arrow[d, "g"] \\ W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ U(W) \end{tikzcd}$$

INOLTRE OSSERVIAMO CHE, COMUNQUE PRESI $(X, W) \in Obj(Set) \times Obj(Vect_k)$ LE FUNZIONI $g \in Hom_{Vect_k}(V_X, W)$ E $f \in Hom_{Set}(X, U(W))$ SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE L'UNA DALL'ALTRA

POSSIAMO DUNQUE PENSARE CHE ESISTA UNA FUNZIONE φ, CHE AD OGNI COPPIA (X, W) ASSOCIA LA FUNZIONE $\varphi_{X,W} : Hom_{Vect_k}(V_X, W) \xrightarrow{\sim} Hom_{Set}(X, U(W))$ IN MANIERA BIUNIVOCA

$$g \longmapsto f$$

<u>DEF</u>: DATE $\mathcal{C}, \mathbb{D}$ CATEGORIE, UN' <u>AGGIUNZIONE</u> DA $\mathcal{C}$ A $\mathbb{D}$ E' UNA COPPIA $(F, G) \in Obj(\mathbb{D}^{\mathcal{C}}) \times Obj(\mathcal{C}^{\mathbb{D}})$ E UNA FUNZIONE $\varphi : Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathbb{D}) \longrightarrow ISO_{Set}(Hom_{\mathbb{D}}(FC, D), Hom_{\mathcal{C}}(C, GD))$

$$(C, D) \longmapsto \varphi_{C,D} :$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbb{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

CON φ BIEZIONE NATURALE IN C E D

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & FC \arrow[d, "g"] \\ GD & D \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \varphi_{CD}$$

CON BIEZIONE NATURALE SI INTENDE CHE I SEGUENTI DIAGRAMMI COMMUTANO ENTRAMBI

$\forall c, c' \in Obj(\mathcal{C}), \ \forall \phi \in Hom_{\mathcal{C}}(c, c'), \ \forall D, D' \in Obj(\mathbb{D}), \ \forall \psi \in Hom_{\mathbb{D}}(D, D')$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbb{D}}(FC, D) \arrow[r, "\varphi_{CD}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbb{D}}(FC, -)\psi"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, GD) \arrow[d, "Hom_{\mathbb{D}}(C, G-)\psi"] \\ Hom_{\mathbb{D}}(FC, D') \arrow[r, "\varphi_{CD'}"] & Hom_{\mathcal{C}}(C, GD') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbb{D}}(FC, D) \arrow[r, "\varphi_{CD}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbb{D}}(F-, D)\phi"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, GD) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(-, GD)\phi"] \\ Hom_{\mathbb{D}}(FC', D) \arrow[r, "\varphi_{C'D}"] & Hom_{\mathcal{C}}(C', GD) \end{tikzcd}$$

<u>DEF</u>: DATA UN'AGGIUNZIONE DA $\mathcal{C}$ A $\mathbb{D}$, (F, G, φ) E $f \in Hom_{\mathbb{D}}(FC, D)$, <u>L'AGGIUNTA DESTRA</u> DI f E' $dag\, f = \varphi_{CD}(f)$

DEF: DATA UN'AGGIUNZIONE (F, G, φ) DA $\mathcal{C}$ A $\mathcal{D}$, IL FUNTORE F E' L'<u>AGGIUNTO SINISTRO</u>, MENTRE G E' <u>L'AGGIUNTO DESTRO</u>

TEOREMA: (F, G, μ) AGGIUNZIONE DA $\mathcal{C}$ A $\mathcal{D}$. ALLORA

(i) $\exists \eta$: t.c. $\forall c \in Ob_i(\mathcal{C})$ $(FC, \eta_c) \in Ob_i(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(C, GFC)$
E' FRECCIA UNIVERSALE DA C A G

(ii) $\exists \varepsilon$: t.c. $\forall D \in Ob_i(\mathcal{D})$ $(GD, \varepsilon_D) \in Ob_i(\mathcal{C}) \times Hom_{\mathcal{D}}(FGD, D)$
E' COFRECCIA UNIVERSALE DA F A D

(iii) $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ IDENTITA'

$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} G$ IDENTITA'

DIN (i)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & FC \arrow[d, "f"] \\ GD & D \arrow[l] \arrow[ul, phantom, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

OSSERVIAMO CHE SE $D = FC \Rightarrow f = Id_{FC}$

$\Rightarrow \varphi_{CFC}(1\!\!1_{FC}) \in Hom_{\mathcal{C}}(C, GFC)$

BATTEZZIAMO $\eta_c = \varphi_{CFC}(1\!\!1_{FC})$

QUINDI SE "SPECCHIAMO IL DIAGRAMMA OTTENIAMO UNA COSA CHE DOVREBBE APPARIRE FAMILIARE

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "G"] & & \mathcal{C} \\ FC \arrow[rr, "G"] \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & & GFC & C \arrow[l, "\eta_c"'] \arrow[dl, "g"] \\ D \arrow[rr] & & GD \arrow[from=u, dashed, "Gf"'] & \end{tikzcd}$$

MOSTRIAMO CHE (FC, η_c) E' FRECCIA UNIVERSALE.

SIA $D \in Ob_i(\mathcal{D})$, SIA $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C, GD)$

$\Rightarrow \exists f = lag(g)$ AGGIUNTA ~~DE~~ SINISTRA

$f = \varphi^{-1}_{CD}(g)$

perche' abbiamo specchiato il ~~gra~~ diagramma

$\Rightarrow g = \eta_c \circ GF$

(ii)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & FC \arrow[d, "f"] \\ GD & D \arrow[l] \arrow[ul, phantom, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

OSSERVIAMO CHE SE $C = GD \Rightarrow g = Id_{GD}$

$\Rightarrow \varphi^{-1}_{GDD}(1\!\!1_{GD}) \in Hom_{\mathcal{D}}(FGD, D)$

BATTEZZIAMO $\varepsilon_D = \varphi^{-1}_{GDD}(1\!\!1_{GD})$

ALLORA IL DIAGRAMMA HA LA SEGUENTE FORMA

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] & & \mathcal{D} \\ GD \arrow[rr] & & FGD \arrow[r, "\varepsilon_D"] & D \\ C \arrow[u, dashed, "\exists g"] \arrow[rr] & & FC \arrow[u, dashed, "Fg"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

MOSTRIAMO (GD, ε_D) E' COFRECCIA UNIVERSALE)

SIA $C \in Ob_i(\mathcal{C})$, SIA $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$

$\Rightarrow \exists g = rag(f)$ AGGIUNTA DESTRA

$g = \varphi_{DC}(f)$

$\Rightarrow f = \varepsilon_D \circ Fg$

DEF: η E' DETTA <u>UNITA'</u> DELL'AGGIUNZIONE, ε E' LA <u>COUNITA'</u>

$\square$ c.v.d.

ESEMPI:

$U: Grp \to Ins$ FUNTORE DIMENTICANTE	L'AGGIUNTO SINISTRO È IL FUNTORE CHE A X ASSOCIA IL GRUPPO LIBERO	L'UNITA' E' L'INCLUSIONE
$\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$	AGGIUNTO SINISTRO: $\amalg$ AGGIUNTO DESTRO: Π	UNITA': (i, j) COUNITA': (π_1, π_2)
$\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{J}$	AGGIUNTO DESTRO: colim AGGIUNTO SINISTRO Lim	UNITA': CONO COUNITA': COCONO