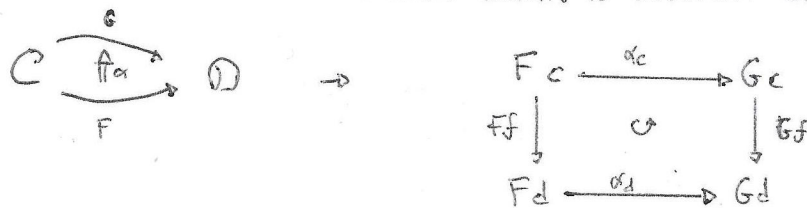


PARTIAMO DA UNA DEFINIZIONE NOTA A TUTTI MA FONDAMENTALE IN CIO' CHE ANDREMO A VEDERE PIU' AVANTI

DEF: DATI DUE FUNTORI  $F, G: C \rightarrow D$ , UNA TRASFORMAZIONE NATURALE DA  $F$  A  $G$  E'  $\alpha: F \rightarrow G$  TALE CHE  $\forall c, d \in \text{Obj}(C), \forall f \in \text{Hom}_C(c, d)$   $Gf \circ \alpha_c = \alpha_d \circ Ff$

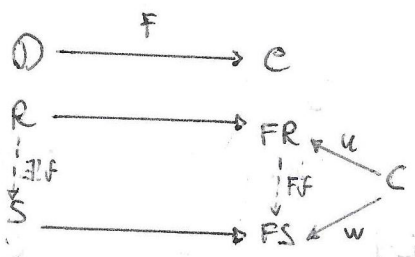
CHE TRADOTTO IN DIAGRAMMI SI ESPRIME TRAMITE IL SEGUENTE QUADRATO COMMUTATIVO



LO STUDIO DELLA TEORIA DELLE CATEGORIE SI BASTA SU "UNIVERSALI" CHE SONO SOSTANZIALMENTE DEI DIAGRAMMI CHE COMMUTANO. SPESSE LA "FRECCIA CHE COMPLETA IL DIAGRAMMI" E' UNICA.

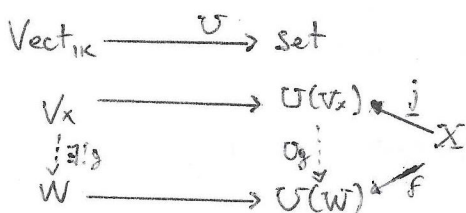
PIU' O MENO OGNI PROPRIETA' PUO' ESSERE ESPRESSA ATTRAVERSO LE FRECCIE UNIVERSALI. VEDIAMO LA DEFINIZIONE:

DEF: DATO UN FUNTORE  $F: D \rightarrow C$  E  $c \in \text{Obj}(C)$ , UNA FRECCIA UNIVERSALE DA  $c$  A  $F$  E' UNA COPPIA  $(R, w) \in \text{Obj}(D) \times \text{Hom}_C(c, Fc)$  t.c.  $\forall s \in \text{Obj}(D), \forall w' \in \text{Hom}_C(c, Fs) \exists! f \in \text{Hom}_D(R, s)$  t.c.  $w' = Ff \circ w$



ESEMPIO: SIA  $\text{Vect}_{IK}$  LA CATEGORIA DEGLI SPAZI VETTORIALI SU CAMPO  $IK$  FISSATO. SIA  $U: \text{Vect}_{IK} \rightarrow \text{Set}$  IL FUNTORE DIMENTICANTE.

DETTO  $V_x$  LO SPAZIO VETTORIALE I CUI ELEMENTI SONO COMBINAZIONI FORMALI DEGLI ELEMENTI DI  $X \in \text{Obj}(\text{Set})$  OSSERVIAMO CHE  $(V_x, j)$  E' FRECCIA UNIVERSALE DA  $X$  A  $U$ . (CON  $j: X \rightarrow V_x \rightarrow U(V_x)$ )



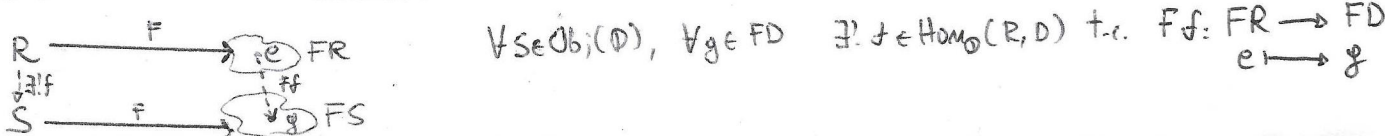
INFATTI  $\forall W \in \text{Obj}(\text{Vect}_{IK}), \forall f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X, U(W))$  POSSIAMO COSTRUIRE UN'UNICA  $g \in \text{Hom}_{\text{Vect}_{IK}}(V_x, W)$  t.c.  $Ug \circ j = f$

DEFINITA COSI':  $g: V_x \rightarrow W$   
 $\sum c_i x_i \rightarrow \sum c_i f(x_i)$

SPESSE IN ALTRI CONTESTI VENGONO UTILIZZATE DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI FRECCIE UNIVERSALI A PATTO DI RINUNCIARE AD ALCUNE PROPRIETA' DELLA CATEGORIA DI PARTENZA.

AD ESEMPIO SE LA CATEGORIA DI PARTENZA HA  $\text{hom}$ -INSIEMI PICCOLI POSSIAMO DEFINIRE IL SEGUENTE OGGETTO

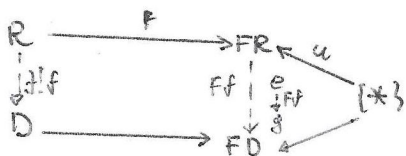
DEF: DATO  $F: D \rightarrow \text{Set}$ , UN ELEMENTO UNIVERSALE E' UNA COPPIA  $(R, e) \in \text{Obj}(D) \times FR$  t.c.



$\forall s \in \text{Obj}(D), \forall g' \in FD \exists! f \in \text{Hom}_D(R, s)$  t.c.  $Ff: FR \rightarrow FS$   
 $e \mapsto g'$

PROPOSIZIONE: ELEMENTO UNIVERSALE  $\Rightarrow$  FRECCIA UNIVERSALE

DIM: SIA  $\{X\} \in \text{Ob}_j(\text{Set})$ . SIA  $u \in \text{Hom}_{\text{Set}}(\{X\}, FR)$  t.c.  $u(x) = e$ . ALLORA LA COPPIA  $(R, u)$  È UNA FRECCIA UNIVERSALE DA  $\{X\}$  A  $F$  POICHÉ IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTA



Q.E.D.

VEDIAMO ORA UN FAMOSO ESEMPIO DI COSTRUZIONE COME ELEMENTO UNIVERSALE

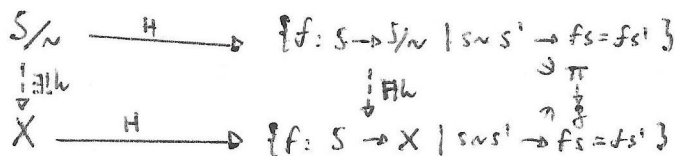
ESEMPIO: SIA  $S \in \text{Ob}_j(\text{Set})$  E  $\sim$  UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA.

SIA  $H: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$

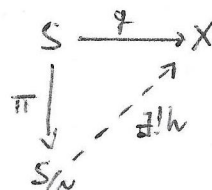
$X \mapsto \{f: S \rightarrow X \mid s \sim s' \Rightarrow fs = fs'\}$

SIA  $\pi: S \rightarrow S/\sim$   
 $s \mapsto [s]_\sim$

LA COPPIA  $(S/\sim, \pi)$  È ELEMENTO UNIVERSALE DI  $H$ . INFATTI



È IL CLASSICO DIAGRAMMA



MOSTRIAMO ORA UNA PROPOSIZIONE CHE CI SARÀ UTILE PIÙ AVANTI LA CUI DIMOSTRAZIONE È A PAG 59 DEL CATEGORIES FOR THE WORKING MATHEMATICIAN DI MAC LANE

PROPOSIZIONE:  $\forall S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \forall c \in \text{Ob}_j(\mathcal{C}),$

$$(R, u) \text{ FRECCIA UNIVERSALE} \Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, S\mathcal{D}) \quad \forall \mathcal{D} \in \text{Ob}_j(\mathcal{D})$$

$$f' \longmapsto Sf' \circ u$$

QUESTA PROPOSIZIONE CI PERMETTE DI CARATTERIZZARE LE FRECCIE UNIVERSALI COME ISOMORFISMI TRA GLI HOM-INSIEMI. È POSSIBILE FARE LO STESSO CON LE TRASFORMAZIONI NATURALI.

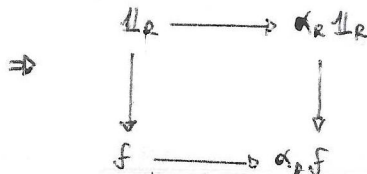
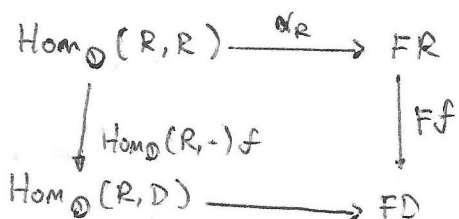
DIMOSTRIAMO ORA IL LEMMA DI YONEDA (STIAMO SUPPONENDO CHE LE CATEGORIE ABBIANO HOM-INSIEMI PICCOLI)

LEMMA DI YONEDA: SIA  $F: \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$  FUNTORE  $\Rightarrow \forall R \in \text{Ob}_j(\mathcal{D}) \quad \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, -), F) \cong FR$

DIM: SIA  $y: \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, -), F) \rightarrow FR$

$$\alpha \longmapsto \alpha_R \circ \mathbb{1}_R$$

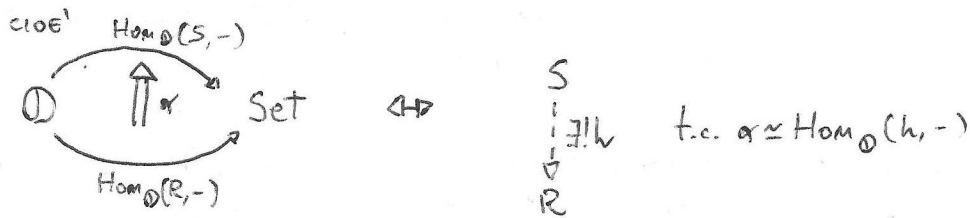
POICHÉ  $\alpha$  TRASFORMAZIONE NATURALE  
 $\rightarrow \forall \mathcal{D} \in \text{Ob}_j(\mathcal{D}), \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, \mathcal{D})$   
IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTA



CIÒ È BREVIVA

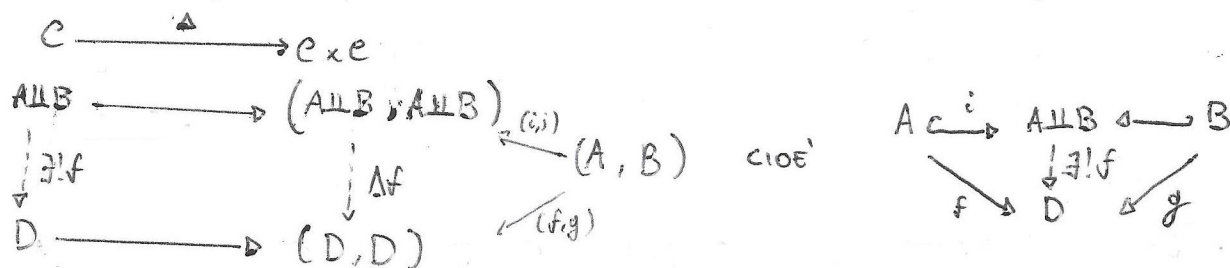
Q.E.D.

COROLLARIO:  $\forall R, S \in \text{Obj}(\mathcal{D}), \forall \alpha: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, -) \exists! h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, R)$  t.c.  $\alpha \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(h, -)$

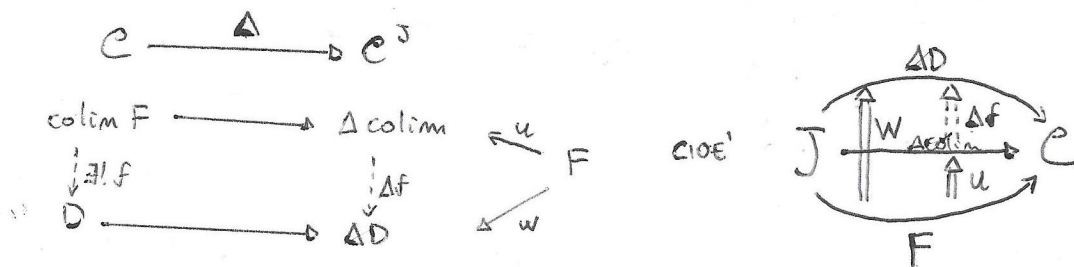


TORNIAMO ORA ALLE FRECCHE UNIVERSALI. DIAMO UN PAIO DI DEFINIZIONI NOTE

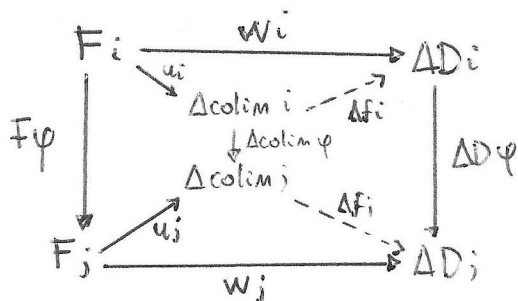
DEF: DATI  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , IL COPRODOTTO E' UNA FRECCIA UNIVERSALE DA  $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  A  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  E SI INDICA CON  $(A \amalg B, (c, i))$



DEF: DATO  $F \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$ , IL COLIMITE DI  $F$  E' UNA FRECCIA UNIVERSALE DA  $F$  A  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$  E SI INDICA CON  $(\text{colim } F, u) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(F, \Delta \text{colim}) \cong \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Nat}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$



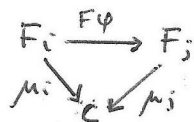
IL CUI DIAGRAMMA VIENE:  $\forall i, j \in \text{Obj}(\mathcal{J}), \forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j)$



CHE COMMUTA POICHE'  $\Delta \text{colim } i \cong \text{colim} \cong \Delta \text{colim } j$   
 $\in \Delta D_i \cong D \cong \Delta D_j$

E' POSSIBILE DARE LA DEFINIZIONE DI COLIMITE ANCHE PASSANDO ATTRAVERSO I CONI

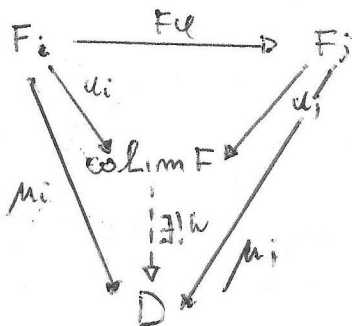
DEF: DATO  $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , UN CONO DALLA BASE  $F$  A  $c$  E'  $\mu = \{\mu_i\}_{i \in \text{Obj}(\mathcal{J})} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F_i, c)$   
 $\forall i, j \in \text{Obj}(\mathcal{J}), \forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) \quad \mu_i = \mu_j \circ F\varphi$



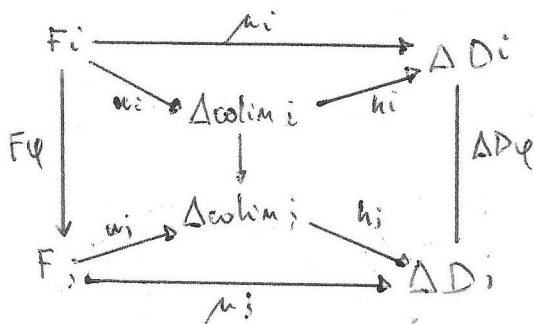
PROPOSIZIONE

$(\text{colim } F, u)$  COLIMITE  $\Leftrightarrow$  U CONO DI BASE  $F$  A  $\text{colim } F$  t.c.  $\forall \mu$  CONO DA  $F$  A  $D$   $\exists ! h \in \text{Hom}_C(\text{colim } F, D)$  t.c.  $\forall i \in \text{Obj}(J) \mu_i = h \circ u_i$

DIM: BASTA OSSERVARE CHE LA SECONDA PARTE EQUIVALE A RICHIEDERE CHE IL SEGUENTE DIAGRAMMA COMMUTI  $\forall i \in \text{Obj}(J), \forall \varphi \in \text{Hom}_C(C_i)$



$\Leftrightarrow$



q.e.d.

ESEMPIO: SIA  $J = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots\}$ ,  $C = \text{Set}$ ,  $F: J \rightarrow C$



$\Rightarrow \text{colim } F = \bigcup_{i \in \text{Obj}(J)} F_i$

ESEMPIO: SIA  $J = \{1, 2\}$ ,  $F: J \rightarrow C$

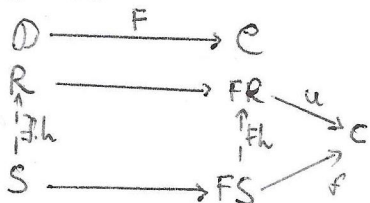


$\Rightarrow \text{colim } F = a \amalg b$

E' POSSIBILE AVERE LE DEFINIZIONI DUALI DI FRECCE UNIVERSALI IN MODO DA DARE UNA DEFINIZIONE DI LIMITI

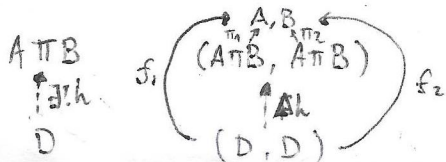
DEF: DATO UN FUNTORE  $F: \mathcal{D} \rightarrow C$  E  $c \in \text{Obj}(C)$ , UNA COFRECCIA UNIVERSALE DA  $F$  A  $c$  E' UNA COPPIA  $(R, u) \in \text{Obj}(\mathcal{D}) \times \text{Hom}_C(FR, c)$  t.c.  $\forall S \in \text{Obj}(\mathcal{D}), \forall f \in \text{Hom}_C(FS, c) \exists ! h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, R)$

t.c.  $f = u \circ Fh$

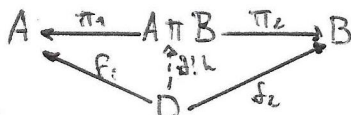


ANALOGAMENTE E' POSSIBILE DEFINIRE IL PRODOTTO COME:

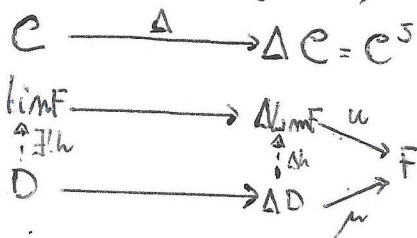
DEF: DATI  $A, B \in \text{Obj}(C)$ , IL PRODOTTO DI  $A$  E  $B$  E' UNA COFRECCIA UNIVERSALE  $(A \amalg B, (\pi_1, \pi_2))$  DAL FUNTORE  $\Delta: C \rightarrow C \times C$  ALL'OGGETTO  $(A, B) \in \text{Obj}(C \times C)$



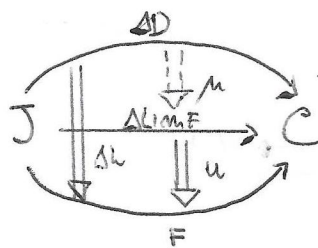
CIOE'



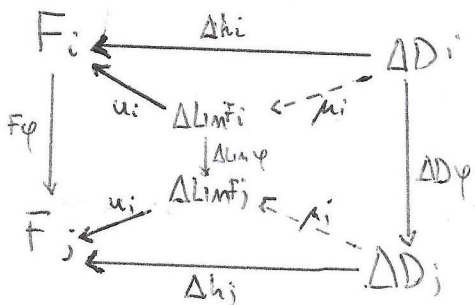
DEF: DATO  $F \in \text{Ob}_j(\mathcal{C}^J)$ , IL LIMITE DI  $F$  E' UNA COFRECCIA UNIVERSALE DA  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^J$  A  $F$   
 E SI INDICA CON  $(\text{Lim } F, u) \in \text{Ob}_j(\mathcal{C}) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}^J}(F, \Delta \text{Lim } F) \simeq \text{Ob}_j(\mathcal{C}) \times \text{Nat}(J, \mathcal{C})$



CIÒ E'



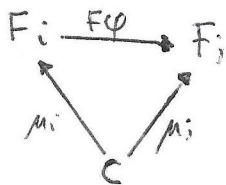
IL UI DIAGRAMMA E' t.c.  $\forall i_j \in \text{Ob}_j(J), \forall \varphi \in \text{Hom}_J(i, j)$  COMMUTA



CHE COMMUTA POICHE'  $\Delta \text{Lim } F_i \simeq \text{Lim } F \simeq \Delta \text{Lim } F_j$   
 $\exists \Delta D_i \simeq D \simeq \Delta D_j$

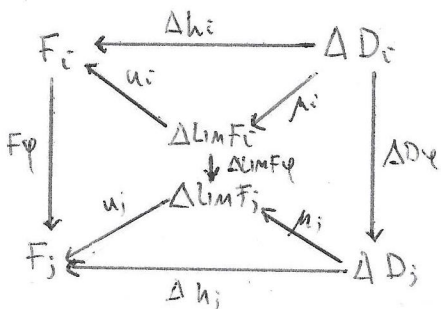
DIAMO ORA LA DEFINIZIONE DI COCONI, IN MODO DA COMPLETARE IN ANALOGIA CON I COLIMITI

DEF: DATO  $F: J \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $c \in \text{Ob}_j(\mathcal{C})$ , UN COCONO ALLA BASE  $F$  DA  $c$  E'  $\mu = \{\mu_i\}_{i \in \text{Ob}_j(J)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^J}(c, F)$   
 t.c.  $\forall i_j \in \text{Ob}_j(J), \forall \varphi \in \text{Hom}_J(i, j), \mu_j = F\varphi \circ \mu_i$

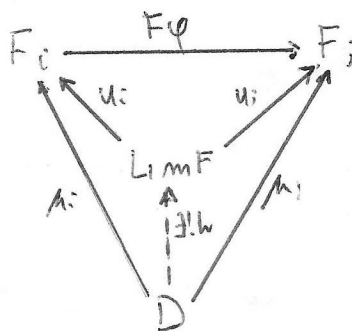


PROPOSIZIONE:  $(\text{Lim } F, u)$  LIMITE  $\Leftrightarrow$  u CONO ALLA BASE  $F$  DA  $c = \text{Lim } F$  t.c.  $\forall \mu$  CONO A  $F$  DA  $D \exists! h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \text{Lim } F)$  t.c.  
 $\forall i \in \text{Ob}_j(J) \mu_i = h \circ u_i$

DIM: BASTA OSSERVARE CHE I DUE DIAGRAMMI SONO EQUIVALENTI



$\Leftrightarrow$



□ c.v.d.

PER INTRODURRE IL NUOVO CONCETTO RIPRENDIAMO L'ESEMPIO SUGLI SPAZI VETTORIALI.

ABBIAMO DUE CATEGORIE,  $\text{Set}$  e  $\text{Vect}_K$  CHE SONO COLLEGATE DA  $U \in \text{Set}^{\text{Vect}_K}$  IL FUNTORE DIMENTICANTE E DA  $V \in \text{Vect}_K^{\text{Set}}$  IL FUNTORE CHE AD OGNI INSIEME ASSOCIA LO SPAZIO VETTORIALE DEGLI ELEMENTI CHE SONO COMBINAZIONI LINEARI FORMALI.

$$\text{Vect}_K \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \xleftarrow{V} \end{array} \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} V_x & & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ W & & U(W) \end{array}$$

INOLTRE OSSERVIAMO CHE, COMUNQUE PRESI

$$(X, W) \in \text{Obj}(\text{Set}) \times \text{Obj}(\text{Vect}_K)$$

LE FUNZIONI  $g \in \text{Hom}_{\text{Vect}_K}(V_x, W)$  E

$f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X, U(W))$  SONO UNIVOCAMENTE

DETERMINATE L'UNA DALL'ALTRA

POSSIAMO DUNQUE PENSARE CHE ESISTA UNA FUNZIONE  $\varphi$  CHE AD OGNI COPPIA  $(X, W)$  ASSOCIA

$$\text{LA FUNZIONE } \varphi_{X,W} : \text{Hom}_{\text{Vect}_K}(V_x, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Set}}(X, U(W)) \text{ IN MANIERA BIUNIVOCA}$$

$$g \longleftrightarrow f$$

DEF : DATE  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  CATEGORIE, UN'AGGIUNZIONE DA  $\mathcal{C}$  A  $\mathcal{D}$  E' UNA COPPIA  $(F, G) \in \text{Obj}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}^{\mathcal{D}})$

E UNA FUNZIONE  $\varphi : \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{ISO}_{\text{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD))$

$$(C, D) \longmapsto \varphi_{C,D} :$$

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

CON  $\varphi$  BIEZIONE NATURALE IN  $\mathcal{C}$  E  $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & FC \\ \downarrow F & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & \downarrow G \\ GD & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{D} \end{array}$$

CON BIEZIONE NATURALE SI INTENDE CHE I SEGUENTI DIAGRAMMI COMMUTANO ENTAMBI

$$\forall c, c' \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \forall \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c'), \forall D, D' \in \text{Obj}(\mathcal{D}), \forall \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, -)\psi & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G-)\psi \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D') & \xrightarrow{\varphi_{C,D'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D) & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, D)\phi & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GD)\phi \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC', D) & \xrightarrow{\varphi_{C',D}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', GD) \end{array}$$

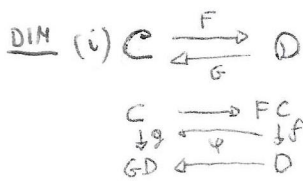
DEF : DATA UN'AGGIUNZIONE DA  $\mathcal{C}$  A  $\mathcal{D}$ ,  $(F, G, \varphi)$  E  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ , L'AGGIUNTA DESTRA

$$\text{DI } f \text{ E' } \text{dag } f = \varphi_{C,D}(f)$$

DEF: DATA UN'AGGIUNZIONE  $(F, G, \psi)$  DA  $\mathcal{C}$  A  $\mathcal{D}$ , IL FUNTORE  $F$  È L'AGGIUNTO SINISTRO, MENTRE  $G$  È L'AGGIUNTO DESTRO

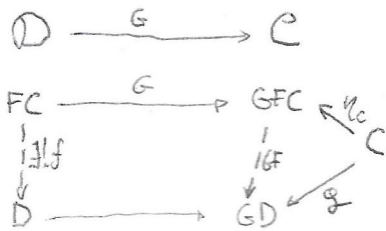
TEOREMA:  $(F, G, \mu)$  AGGIUNZIONE DA  $\mathcal{C}$  A  $\mathcal{D}$  - ALLORA

- (i)  $\exists \eta$ : t.c.  $\forall c \in \text{Ob}_i(\mathcal{C})$   $(Fc, \eta_c) \in \text{Ob}_i(\mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, GFC)$   
È FRECCIA UNIVERSALE DA  $\mathcal{C}$  A  $\mathcal{D}$
- (ii)  $\exists \varepsilon$ : t.c.  $\forall d \in \text{Ob}_i(\mathcal{D})$   $(Gd, \varepsilon_d) \in \text{Ob}_i(\mathcal{C}) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, \mathcal{D})$   
È COPERRECCIA UNIVERSALE DA  $\mathcal{F}$  A  $\mathcal{D}$
- (iii)  $G \xrightarrow{\eta_G} GFG \xrightarrow{GE} G$  IDENTITA'  
 $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{EF} F$  IDENTITA'



OSSERVIAMO CHE SE  $D = FC \rightarrow f = \text{Id}_{FC}$   
 $\Rightarrow \varphi_{FC}(\text{Id}_{FC}) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, GFC)$   
 BATTERIZIAMO  $\eta_c = \varphi_{FC}(\text{Id}_{FC})$

QUINDI SE "SPECCHIAMO IL DIAGRAMMA OTTIENIAMO UNA COSA CHE DOVREBBE APPARIRE FAMILIARE



MOSTRIAMO CHE  $(Fc, \eta_c)$  È FRECCIA UNIVERSALE.

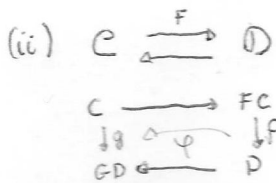
SI A  $d \in \text{Ob}_i(\mathcal{D})$ , SI A  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, GD)$

$\Rightarrow \exists f = \text{rag}(g)$  AGGIUNTA SINISTRA

$$f = \varphi_{GD}^{-1}(g)$$

//perche' abbiamo specchiato il triangolo

$$\Rightarrow g = \eta_c \circ GF$$

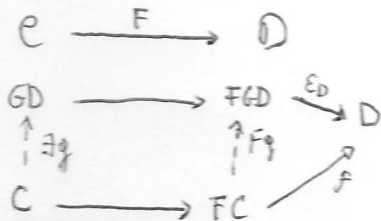


OSSERVIAMO CHE SE  $C = GD \rightarrow g = \text{Id}_{GD}$

$$\Rightarrow \varphi_{GD}^{-1}(\text{Id}_{GD}) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGD, \mathcal{D})$$

$$\text{BATTERIZIAMO } \varepsilon_d = \varphi_{GD}^{-1}(\text{Id}_{GD})$$

ALLORA IL DIAGRAMMA HA LA SEGUENTE FORMA



MOSTRIAMO  $(GD, \varepsilon_D)$  È COPERRECCIA UNIVERSALE

SI A  $c \in \text{Ob}_i(\mathcal{C})$ , SI A  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, \mathcal{D})$

$\Rightarrow \exists g = \text{rag}(f)$  AGGIUNTA DESTRA

$$g = \varphi_{FC}(f)$$

$$\Rightarrow f = \varepsilon_D \circ Fg$$

DEF:  $\eta$  È DETTA UNITÀ DELL'AGGIUNZIONE, E È LA COUNITA'

ESEMPI:

$U: \text{Grp} \rightarrow \text{Ins}$   
FUNTORE DIMENTICANTE

L'AGGIUNTO SINISTRO È  
IL FUNTORE CHE A X ASSOCIA  
IL GRUPPO LIBERO

L'UNITÀ È L'INCLUSIONE

$\Delta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

AGGIUNTO SINISTRO:  $\underline{11}$

UNITÀ:  $(i, j)$

AGGIUNTO DESTRO:  $\overline{11}$

COUNITÀ:  $(\pi_1, \pi_2)$

$\Delta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{S}}$

AGGIUNTO DESTRO:  $\text{colm}$

UNITÀ:  $\text{CON}$

AGGIUNTO SINISTRO:  $\text{Lim}$

COUNITÀ:  $\text{ECONO}$