Metodi simpliciali in algebra omologica

Oggetti simpliciali

Sia Δ la categoria data da:
- oggetti: insiemi finiti ordinati $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$
- morfismi: applicazioni crescenti $[m] \to [n]$.

Data una categoria $\mathcal{A}$ sia $S\mathcal{A}$ la categoria data da:
- oggetti: funtori (controvarianti) $\Delta^{op} \to \mathcal{A}$
- morfismi: trasformazioni naturali

La categoria $S\mathcal{A}$ si dice categoria degli oggetti simpliciali su $\mathcal{A}$.
Analogamente per oggetti cosimpliciali si intendono i funtori covarianti $\Delta \to \mathcal{A}$.

Facce e degenerazioni

Consideriamo in Δ morfismi di tipo
- "faccia": $\varepsilon_i : [n-1] \to [n]$

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j & i < j \\ j+1 & i \geq j \end{cases}$$ (e' l'unico morfismo iniettivo che "salta" i)

- "degenerazione": $\eta_i : [n+1] \to [n]$

$$\eta_i(j) = \begin{cases} j & i \leq j \\ j-1 & i > j \end{cases}$$ (unico morfismo suriettivo che tocca due volte i)

Abbiamo le seguenti identita':

$$\varepsilon_j \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_{j-1} \qquad i < j$$

$$\eta_j \eta_i = \eta_i \eta_{j+1} \qquad i \leq j$$

$$\eta_j \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i \eta_{j-1} & i < j \\ \mathrm{id} & i = j, j+1 \\ \varepsilon_{i-1} \eta_j & i > j+1 \end{cases}$$

Lemma: Ogni morfismo $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ si fattorizza in modo unico come $\alpha = \varepsilon\, \eta$, dove

- ε è iniettiva, e si fattorizza in modo unico in facce $\varepsilon = \varepsilon_{i_1} \circ \dots \circ \varepsilon_{i_s}$ con $i_s < \dots < i_1$
- η è suriettiva, e si fattorizza in modo unico in degenerazioni $\eta = \eta_{j_1} \circ \dots \circ \eta_{j_t}$, con $j_1 < \dots < j_t$.

Dim.: Sia $i_1 = \max \{ [n] \setminus \alpha[m] \}$. Definiamo $\alpha^{(1)} : [m] \to [n-1]$ ponendo $\alpha^{(1)}(j) = \begin{cases} \alpha(j) & \text{se } \alpha(j) < i_1 \\ \alpha(j) - 1 & \text{se } \alpha(j) > i_1 \end{cases}$, allora $\alpha = \varepsilon_{i_1} \circ \alpha^{(1)}$.

Otteniamo induttivamente $\alpha = \varepsilon_{i_1} \circ \dots \circ \varepsilon_{i_s} \circ \alpha^{(s)}$, con $i_s < \dots < i_1$.
In modo simile fattorizziamo $\alpha^{(s)}$ in degenerazioni ($\alpha^{(s)}$ è suriettiva).
L'unicità segue dalla costruzione fatta. $\square$

Proposizione: Assegnare un oggetto simpliciale A su una categoria $\mathcal{A}$ è equivalente ad assegnare una successione $A_0, A_1, \dots$ di oggetti in $\mathcal{A}$, insieme a morfismi $\partial_i : A_n \to A_{n-1}$ e $\sigma_i : A_{n-1} \to A_n$ che soddisfano le <u>identità simpliciali</u>:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \qquad i < j$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i \qquad i \le j$$

$$\partial_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_{j-1} \partial_i & i < j \\ id & i = j, j+1 \\ \sigma_j \partial_{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

Sotto questa corrispondenza abbiamo $A_n = A[n]$, $\partial_i = A\varepsilon_i$, $\sigma_i = A\eta_i$.

Dim.: La funtorialità discende dal fatto che le identità simpliciali controllano la composizione. $\square$

Esempi: (1) Simplessi

Sia $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$

Siano $v_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)$ i vertici di Δ^n.

Dato $\alpha : [m] \to [n]$ morfismo in Δ definiamo $\alpha_* : \Delta^m \to \Delta^n$ ponendo $\alpha_*(v_i) = v_{\alpha(i)}$, ed estendendo linearmente.

In questo modo $\Delta^0, \Delta^1, \dots$ definisce uno spazio topologico cosimpliciale

Geometricamente

$\partial^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ è l'inclusione di Δ^{n-1} in Δ^n come i-esima faccia

$\sigma^i : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ è lo schiacciamento di Δ^{n+1} sulla sua i-esima faccia.

(2) Complessi simpliciali

Sia V un insieme di vertici ordinato. Sia $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ t.c.

- $\emptyset \notin K$
- $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$

K si dice complesso simpliciale ordinato. Sia $SS(K)$ l'insieme simpliciale

- $SS_n(K) = \{(v_0, \dots, v_n) \in V^{n+1} \mid v_0 \leq \dots \leq v_n, \ \{v_0, \dots, v_n\} \in K\}$
- Se $\alpha : [m] \to [n]$ è un morfismo in Δ definiamo $\alpha_* : SS_n(K) \to SS_m(K)$ ponendo $\alpha_*(v_0, \dots, v_n) = (v_{\alpha(0)}, \dots, v_{\alpha(m)})$.

$$\partial_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

$$\sigma_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, v_i, v_i, \dots, v_n)$$

In questo modo $SS(K)$ è un insieme simpliciale.

Realizzazione geometrica

Se X è un insieme simpliciale la sua realizzazione geometrica è lo spazio topologico $|X|$ costruito come segue:

1. Consideriamo su $X_n \times \Delta^n$ la topologia dell'unione disgiunta di copie di Δ^n.
2. Sull'unione disgiunta $\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$ consideriamo la relazione $\sim$ che identifica $(\alpha^*(x), s) \sim (x, \alpha_*(s))$ per ogni $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ.
3. $|X| := \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n\right) / \sim$.

Esempio: Spazio classificante

Sia G un gruppo, consideriamo l'insieme simpliciale BG dato da:

- $B_n G = G^n$
- $\partial_i (g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n)$

  $\sigma_i (g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n)$

Lo spazio classificante di G è $|BG|$.

Fibrazioni di Kan

Un insieme simpliciale si dice <u>fibrante</u> se soddisfa la <u>condizione di Kan</u>:

- $\forall n,k$ con $0 \leq k \leq n+1$ se $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1} \in X_n$ tali che $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ $\forall i<j$ $(i,j \neq k)$ allora $\exists\, y \in X_{n+1}$ t.c. $\partial_i y = x_i$ $\forall i \neq k$.

<u>Lemma</u>: I gruppi simpliciali sono fibranti

<u>Dim.</u>: Sia G un gruppo simpliciale, e siano $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1} \in G_n$ tali che $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ $\forall i<j$ $(i,j \neq k)$. Proviamo per induzione su r che esiste $g_r \in G_n$ t.c. $\partial_i g_r = x_i$ $\forall i \leq r$.

- $r = -1$: poniamo $g_{-1} = 1$
- $r > -1$: sia $g = g_{r-1}$ dato t.c $\partial_i g = x_i$ $\forall i < r$. $(i \neq k)$

  Se $r = k$ poniamo $g_r = g$, allora $\partial_i g_r = \partial_i g = x_i$ $\forall i \leq r$ $(i \neq k)$.

  Altrimenti sia $u = x_r^{-1} \partial_r g$. Per $i < r$ abbiamo $\partial_i u = (\partial_i x_r^{-1})(\partial_i \partial_r g) =$
  $= (\partial_i x_r)^{-1}(\partial_r \partial_{i-1} g) = (\partial_i x_r)^{-1}(\partial_r x_{i-1}) = (\partial_i x_r)^{-1}(\partial_i x_r) = 1$.

  Poniamo $g_r = g(\sigma_r u)^{-1}$. Per $i<r$ abbiamo $\partial_i g_r = (\partial_i g) \cdot (\partial_i \sigma_r u)^{-1} =$
  $= x_i \cdot (\sigma_{r-1} \partial_i u)^{-1} = x_i$. Per $i = r$ si ha $\partial_i g_r = \partial_r g \cdot (\partial_r \sigma_r u)^{-1} =$
  $= \partial_r g \cdot u^{-1} = \partial_r g (\partial_r g)^{-1} x_r = x_r$. Quindi $\partial_i g_r = x_i$ $\forall i \leq r$ $(i \neq k)$.

L'elemento $y = g_{n+1} \in G_{n+1}$ soddisfa $\partial_i y = x_i$ $\forall i \leq n+1$ $(i \neq k)$. Quindi G è fibrante. $\square$

<u>Esempio</u>: "Simplessi singolari"

Sia X uno spazio topologico, e sia $S(X)$ l'insieme simpliciale dato da:

- $S_n(X) = \{ \gamma : \Delta^n \to X \text{ continua} \}$
- $\partial_i \gamma : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$
  $$(t_0, \dots, t_{n-1}) \longmapsto \gamma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$$
  $\sigma_i \gamma : \Delta^{n+1} \longrightarrow X$
  $$(t_0, \dots, t_{n+1}) \longmapsto \gamma(t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1})$$

$S(X)$ definisce l'insieme simpliciale dei <u>simplessi singolari su X</u>. ed è fibrante perché una funzione continua su $n+1$ facce di Δ^{n+1} si estende continua a tutto Δ^{n+1} (l'unione di $n+1$ facce di Δ^{n+1} è retratto di deformazione di Δ^{n+1}).

Un morfismo di insiemi simpliciali $\pi : E \to B$ è una <u>fibrazione</u> se

- $\forall n$, $\forall b \in B_{n+1}$, $\forall k$ con $0 \le k \le n+1$ se $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1} \in E_n$ sono tali che $\partial_i b = \pi(x_i)$ e $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ $\forall i<j$ $(i,j \neq k)$ allora esiste $y \in E_{n+1}$ t.c. $\pi(y) = b$ e $\partial_i y = x_i$ $\forall i = k$.

La nozione di fibrazione generalizza quella di insieme fibrante.

<u>Omotopia simpliciale di insiemi fibranti</u>

Sia X un insieme simpliciale fibrante, e sia $* \in X_0$ un "punto base" fissato. Con abuso di notazione indichiamo con $*$ anche $\sigma_0^n(*) \in X_n$ e definiamo

$$Z_n = \{ x \in X_n \mid \partial_i x = * \quad \forall i = 0, \dots, n \}$$

Diremo due elementi $x, x' \in Z_n$ <u>omotopi</u> se esiste $y \in X_{n+1}$ (detto <u>omotopia</u> tra x e x') tale che:

$$\partial_i y = \begin{cases} * & i < n \\ x & i = n \\ x' & i = n+1 \end{cases}$$

e indicheremo $x \sim x'$.

<u>Lemma</u>: $\sim$ è una relazione di equivalenza su Z_n.

<u>Dim.</u>: • riflessività: sia $x \in Z_n$, allora $y = \sigma_n x$ è un'omotopia da x a x infatti

$$\partial_i y = \partial_i \sigma_n x = \begin{cases} \sigma_{n-1} \partial_i x & i<n \\ x & i=n \\ x & i=n+1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_{n-1} \sigma_0^n(*) & i<n \\ x & i=n \\ x & i=n+1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_0^n(*) = * & i<n \\ x & i=n,n+1 \end{cases}$$

• simmetria e transitività: sia y un'omotopia da x a x' e y'' un'omotopia da x a x''. Applichiamo la condizione di Kan a $*, \dots, *, y', y''$ con $k = n+2$.
($\partial_i y' = \partial_{n-1} *$, $\partial_i y'' = \begin{cases} \partial_n * & i<n \\ \partial_n y' & i=n \end{cases}$) e otteniamo ~~$y$~~ $z \in X_{n+2}$ tale che $\partial_n z = y'$, $\partial_{n+1} z = y''$, $\partial_i z = *$ $i<n$. Sia $y = \partial_{n+2} z$, allora y è una omotopia da x' a x'':

$$\partial_i y = \partial_i \partial_{n+2} z = \partial_{n+1} \partial_i z = \partial_{n+1} \begin{cases} * & i<n \\ y' & i=n \\ y'' & i=n+1 \end{cases} = \begin{cases} * & i<n \\ x' & i=n \\ x'' & i=n+1 \end{cases} \qquad \square$$

Se G è un gruppo simpliciale, considerato come insieme simpliciale fibrante con punto base $* = 1$ ($\pi_n(G)$ è indipendente dalla scelta di $*$) è utile considerare

$$N_n G = \{ x \in G_n \mid \partial_i x = 1 \quad \forall i \neq n \} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker}(\partial_i : G_n \longrightarrow G_{n-1})$$

e il complesso:

$$\cdots \longrightarrow N_{n+1} G \xrightarrow{\partial_{n+1}} N_n G \xrightarrow{\partial_n} N_{n-1} G \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow 1$$

Allora $Z_n = \ker(\partial_n : N_n G \longrightarrow N_{n-1} G)$.

e $B_n = \operatorname{im}(\partial_{n+1} : N_{n+1} G \longrightarrow N_n G) = \{ x \in N_n G \mid x \sim 1 \}$

Dunque abbiamo

$$\pi_n(G) = Z_n / B_n = H_n(NG) .$$

<u>Complesso associato</u>

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, e A un oggetto simpliciale su $\mathcal{A}$. Il <u>complesso associato</u> ad A è il complesso CA dato da:

- $C_n A = A_n$
- $d = \sum_i (-1)^i \partial_i$

Dalle identità simpliciali abbiamo $d^2 = 0$. Definiamo il <u>complesso normalizzato</u> NA ponendo

- $N_n A = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker}(\partial_i : A_n \longrightarrow A_{n-1})$
- $d = (-1)^n \partial_n$

Da questa definizione segue che NA è un sottocomplesso di CA. Definiamo il <u>complesso degenere</u> DA come ~~quello~~ il sottocomplesso di CA dato da $D_n A = \sum_i \sigma_i(A_{n-1})$.

Lemma: $CA = NA \oplus DA$

Dim.: • $N_nA \cap D_nA = 0$: sia $y = \sum_j \sigma_j x_j \in N_nA \cap D_nA$, $x_j \in A_{n-1}$.
Sia i il minimo intero t.c. $\sigma_i x_i \neq 0$. Allora possiamo scrivere $y = y - \sigma_i \partial_i y =$
$= \sum_{j>i} \sigma_j (x_j')$ per qualche $x_j' \in A_{n-1}$ $(\sigma_i \partial_i y = \sigma_i x_i + \sum_{j>i} \sigma_i \sigma_{j-1} \partial_i x_j = \sigma_i x_i + \sum_{j>i} \sigma_j(\sigma_i \partial_i x_j))$.
Iterando otteniamo $y = 0$. Quindi $N_nA \cap D_nA = 0$.
• $C_nA = N_nA + D_nA$: sia $y \in A_n$, sia j il minimo intero t.c. $\partial_j y \neq 0$. Sia
$y' = y - \sigma_j \partial_j y$. Allora per $i<j$ $\partial_i y' = \partial_i y - \partial_i \sigma_j \partial_j y = \partial_i y - \sigma_{j-1} \partial_i \partial_j y =$
$= \partial_i y - \sigma_{j-1} \partial_{j-1} \partial_i y = 0 - 0 = 0$. Mentre per $i = j$ $\partial_j y' = \partial_j y - \partial_j \sigma_j \partial_j y = 0$.
Quindi il minimo intero j' t.c. $\partial_{j'} y' \neq 0$ è strettamente maggiore di j.
Per ipotesi induttiva $y' \in N_nA + D_nA$, quindi $y \in N_nA + D_nA$. □

Omotopia simpliciale in categorie abeliane

Se A è un oggetto simpliciale in una categoria abeliana $\mathcal{A}$ definiamo la sua omotopia simpliciale ponendo

$$\pi_n(A) = H_n(NA)$$

Teorema: Sia A un oggetto simpliciale in una categoria abeliana $\mathcal{A}$. Allora $\pi_*(A) = H_*(NA) = H_*(CA)$.

Siano A e B oggetti simpliciali in una categoria abeliana $\mathcal{A}$. Due morfismi simpliciali $f, g : A \to B$ sono omotopi ($f \simeq$) se esistono morfismi $\{h_i\}$, $h_i : A_n \to B_{n+1}$ in $\mathcal{A}$ tali che $\partial_0 h_0 = f$, $\partial_{n+1} h_n = g$ e

$$\partial_i h_j = \begin{cases} h_{j-1} \partial_i & i<j \\ \partial_i h_{i-1} & i=j \ (\neq 0) \\ h_j \partial_{i-1} & i>j+1 \end{cases} \qquad \sigma_i h_j = \begin{cases} h_{j+1} \sigma_i & i \leq j \\ h_j \sigma_{i-1} & i>j \end{cases}$$

Chiamiamo $\{h_i\}$ omotopia da f a g.

Lemma: Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, e siano $f, g : A \to B$ morfismi simpliciali omotopi. Allora $Nf, Ng : NA \to NB$ sono morfismi di complessi omotopi.

Dim: Possiamo supporre $f = 0$. Sia $s_n = \sum (-1)^j h_j : A_n \to B_{n+1}$, dove $\{h_j\}$ è un'omotopia da f a g. Allora $s_n(Z_n(A)) \subseteq Z_n(B)$ e abbiamo

$$\partial_{n+1} s_n - s_{n-1} \partial_n = (-1)^n g$$

Dunque $\{(-1)^n s_n\}$ è un'omotopia di complessi da 0 a Ng. □

Corrispondenza di Dold-Kan

Teorema (di Dold-Kan): Per ogni categoria abeliana $\mathcal{A}$ il funtore normalizzato N è un'equivalenza di omotopia da $S\mathcal{A}$ a $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$.
Inoltre sotto questa corrispondenza l'omotopia simpliciale corrisponde ~~Dim:~~ all'omologia e omotopie di morfismi simpliciali corrispondono a omotopie di complessi di catene.

Dim.: Costruiamo il funtore inverso $K : Ch_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow S\mathcal{A}$.
Sia C complesso ≥ 0 in $\mathcal{A}$, definiamo un oggetto simpliciale KC in $\mathcal{A}$:

- $K_n C = \bigoplus_{\eta : [n] \twoheadrightarrow [p]} C_p[\eta]$ con $C_p[\eta] = C_p$

- sia $\alpha : [m] \to [n]$ morfismo in Δ, definiamo $KC(\alpha, \eta)$ come la restrizione di $KC\alpha$ su $C_p[\eta] \subseteq K_n C$ ponendo

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta'"'] & {[n]} \arrow[d, "\eta"] \\ {[q]} \arrow[r, hook, "\varepsilon"] & {[p]} \end{tikzcd}$$

1. sia $\eta\alpha = \varepsilon\eta'$ con ε iniettiva e η suriettiva
2. Sia $KC(\alpha,\eta) = \begin{cases} \cong : C_p[\eta] \to C_p[\eta'] & \text{se } p=q \\ d : C_p[\eta] \to C_{p-1}[\eta'] & \text{se } q = p-1, \ \varepsilon = \varepsilon_p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Con questa definizione KC è un oggetto simpliciale:

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta''"] & {[n]} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta'"] & {[l]} \arrow[d, "\eta"] \\ {[r]} \arrow[r, hook, "\varepsilon'"] & {[q]} \arrow[r, hook, "\varepsilon"] & {[p]} \end{tikzcd}$$

$$C_p[\eta] \xrightarrow[\{\cong, d, 0\}]{} C_q[\eta'] \xrightarrow[\{\cong, d, 0\}]{} C_r[\eta'']$$

Controllando i casi possibili $(\cong, d, 0)$ otteniamo la funtorialità di KC.
Sia $f : C \to D$ un morfismo di complessi ≥ 0, definiamo $Kf : KC \to KD$ ponendo

$$K_n f\big|_{C_p[\eta] \subseteq K_n C} : C_p[\eta] \xrightarrow{f} D_p[\eta] \subseteq K_n D.$$

La funtorialità di K è facile da osservare.

Verifichiamo che $N(KC) \cong C$ per ogni C complesso ≥ 0 in $\mathcal{A}$.

$K_nC = \bigoplus_{\eta:[n]\twoheadrightarrow[p]} C_p[\eta]$. Se $p \neq n \Rightarrow \eta \neq id_n$, e fattorizziamo $\eta = \eta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \eta_{j_t}$ con $j_1 < \ldots < j_t$. Allora abbiamo $(\sigma_{j_t} \cdot \ldots \cdot \sigma_{j_1})(C_p[id_p]) = C_p[\eta]$

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"'] & {[p]} \arrow[d, "id_p"] \\
{[p]} \arrow[r, hook, "id_p"] & {[p]}
\end{tikzcd}$$

Dunque $C_p[\eta] \subseteq D_n(KC)$

Se $p = n \Rightarrow \eta = id_n$, e abbiamo $\partial_i|_{C_n[id_n]} = \begin{cases} 0 & i < n \\ d & i = n \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}
{[n-1]} \arrow[r, "\varepsilon_i"] \arrow[d, "id_{n-1}"'] & {[n]} \arrow[d, "id_n"] \\
{[n-1]} \arrow[r, hook, "\varepsilon_i"] & {[n]}
\end{tikzcd}$$

Quindi $C_n[id_n] = N_n(KC)$.

Verifichiamo che $K(NA) \cong A$ per ogni A oggetto simpliciale in $\mathcal{A}$.

Costruiamo un morfismo simpliciale $\psi_A : K(NA) \longrightarrow A$ ponendo $\psi_A|_{N_pA[\eta]} = N_pA[\eta] \subseteq A_p \xrightarrow{A\eta} A_n$. Allora ψ_A è un morfismo simpliciale

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[d, "\alpha"'] \\
{[n]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_m(NA) \arrow[r, "\psi_A"] & A_m \\
K_n(NA) \arrow[u, "KNA\alpha"] \arrow[r, "\psi_A"] & A_n \arrow[u, "A\alpha"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N_qA[\eta'] \arrow[r, "A\eta'"] & A_m \\
N_pA[\eta] \arrow[u, "A\varepsilon"] \arrow[r, "A\eta"] & A_n \arrow[u, "A\alpha"']
\end{tikzcd}$$

dove: $\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta'"'] & {[n]} \arrow[d, "\eta"] \\
{[q]} \arrow[r, hook, "\varepsilon"] & {[p]}
\end{tikzcd}$ commuta.

Dobbiamo provare che ψ_A è un isomorfismo. Abbiamo che $N\psi_A : NK(NA) \longrightarrow NA$ è un isomorfismo (è esattamente quello del punto precedente), e usiamo il seguente lemma.

Lemma: Sia $f: B \to A$ un morfismo simpliciale t.c. $Nf: NB \to NA$ è un isomorfismo, allora f è un isomorfismo.

Dim.: Proviamo per induzione su n che ogni $f_n: B_n \to A_n$ è un isomorfismo, e ogni $(\Lambda f)_n : (\Lambda B)_n \to (\Lambda A)_n$ è un isomorfismo (indichiamo con $(\Lambda B)_n = \ker\{\partial_0 : B_{n+1} \to B_n\}$ e analogamente per A). Osserviamo che l'ipotesi del teorema vale anche per Λf.

$n=0$: $B_0 = N_0 B \overset{Nf}{\cong} N_0 A = A_0$

$n>0$: Per ipotesi induttiva f_n e $(\Lambda f)_n$ sono isomorfismi. Quindi per il lemma dei 5 f_{n+1} è un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\Lambda B)_n \arrow[r] \arrow[d, "(\Lambda f)_n", "\cong"'] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n", "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\Lambda A)_n \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] & A_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Per concludere sia $\{s_n\}$ omotopia di ~~complex~~ morfismi di complessi da f a g, $f, g : C \to C'$. Definiamo $h_i : K_n C \to K_{n+1} C'$ come segue:

- $$h_i\big|_{C_n[id_n]} = \begin{cases} \sigma_i f & i < n-1 \\ \sigma_{n-1} f - \sigma_n s_{n-1} d & i = n-1 \\ \sigma_n (f - s_{n-1} d) - s_n & i = n \end{cases}$$

- Sia $\eta : [n] \twoheadrightarrow [p]$. Sia j il massimo intero in $[n]$ t.c. $\eta(j) = \eta(j+1)$ ~~h_i~~ e fattorizziamo $\eta = \eta' \eta_j$, allora $\sigma_j (C_p[\eta']) \cong C_p[\eta]$

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, "\eta_j"] \arrow[d, "\eta"'] & {[n-1]} \arrow[d, "\eta'"] \\
{[p]} \arrow[r, "id"] & {[p]}
\end{tikzcd}$$

Induttivamente abbiamo definito h_i su $C_p[\eta']$. Sia h_i' la composizione di $C_p[\eta] \cong C_p[\eta']$ con $h_i\big|_{C_p[\eta']}$, e definiamo

$$h_i\big|_{C_p[\eta]} = \begin{cases} \sigma_j h'_{i-1} & j < i \\ \sigma_{j+1} h_i' & j \geq i \end{cases}$$

È facile calcolare che $\{h_i\}$ è un'omotopia da Kf a Kg. □