Oggetti simpliciali aumentati

Def: Un oggetto ~~aumentato~~ simpliciale aumentato in una categoria $\mathcal{A}$ è un oggetto simpliciale A_* insieme a un morfismo $\varepsilon : A_0 \to A_{-1}$, con A_{-1} oggetto fissato, t.c. $\varepsilon \partial_0 = \varepsilon \partial_1$.

Se $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ è un oggetto simpliciale aumentato in una categoria abeliana $\mathcal{A}$, possiamo aumentare i complessi CA e NA:

$$0 \leftarrow A_{-1} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{d} \cdots \xleftarrow{d} \cdots$$

Def: Un oggetto simpliciale aumentato $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ in una categoria $\mathcal{A}$ si dice asferico se $\pi_n(A_*) = 0$ per $n \neq 0$ e $\varepsilon : \pi_0(A_*) \cong A_{-1}$
(Se $\mathcal{A}$ è una categoria abeliana CA e NA sono risoluzioni di A_{-1})

Def.: Un oggetto simpliciale aumentato $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ in una categoria $\mathcal{A}$ si dice contraibile a dx se esistono morfismi $f_n : A_n \to A_{n+1}$ $(n \geq -1)$ tali che:

$$\begin{cases} \varepsilon f_{-1} = id \\ \partial_{n+1} f_n = id & n \geq 0 \\ \partial_0 f_0 = f_{-1} \varepsilon \\ \partial_i f_n = f_{n-1} \partial_i & 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Si dice contraibile a sx se esistono morfismi $f_n : A_n \to A_{n+1}$ tali che

$$\begin{cases} \varepsilon f_{-1} = id \\ \partial_0 f_n = id & n \geq 0 \\ \partial_1 f_0 = f_{-1} \varepsilon \\ \partial_i f_n = f_{n-1} \partial_{i-1} & 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

~~Dim.~~

Proposizione (criterio di asfericità)

1. Se $\mathcal{A}$ è una categoria abeliana ogni oggetto simpliciale aumentato contraibile è asferico, e il suo complesso associato aumentato si spezza esatto

2. Sia $\mathcal{A}$ la categoria dei Set e X un insieme simpliciale fibrante con punto base $*$, e $\varepsilon : X \to X_{-1}$ un aumento. Se $X \xrightarrow{\varepsilon} X_{-1}$ è contraibile a dx o a sx e $f_n(*) = *$ per ogni n, allora X è asferico.

Dim.: (1) $\quad A_{-1} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{d} A_1 \xleftarrow{d} \cdots$

- $\pi_0(A_*) \cong A_{-1}$: $\quad \pi_0(A_*) = \dfrac{A_0}{(\partial_0 - \partial_1)A_1}$

$$\frac{A_0}{(\partial_0-\partial_1)A_1} \xrightarrow{\varepsilon_*} A_{-1}$$

$$x + (\partial_0-\partial_1)A_1 \longmapsto \varepsilon x \qquad \text{è un isomorfismo}$$

$$f_{-1}x + (\partial_0-\partial_1)A_1 \longmapsfrom x$$

$$\longmapsto \varepsilon f_{-1} x = x$$

- $\pi_n(A_*) = 0 \quad n > 0$: $\quad \pi_n(A_*) = \dfrac{\ker d}{d A_{n+1}}$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i x = 0 \implies f_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i x \right) = 0$$

Quindi $\quad x = x + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_{n-1} \partial_i x = x + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i (f_n x) =$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i (f_n x) = d(f_n x).$$

- $C_*A \to A_{-1}$ spezza esatto:

$$\begin{tikzcd} A_{-1} & A_0 \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[dr] & A_1 \arrow[l, "d"'] \arrow[dr] & \cdots \arrow[l] \\ A_{-1} \arrow[ur] & A_0 \arrow[l, "\varepsilon"'] & A_1 \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

$d f_{n+1} + f_n d = id$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i f_{n+1} + f_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_n \partial_i + f_n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i + (-1)^{n+1} id$. Quindi $\{(-1)^n f_n\}$ spezza. □

Funtori aggiunti

<u>Def</u>: ~~Una coppia~~ Due funtori $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ si dicono <u>aggiunti</u> se esiste una biezione per ogni oggetto A in $\mathcal{A}$ e B in $\mathcal{B}$

$$\tau = \tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RB)$$

che è "naturale" in A e in B. Cioè date $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA', B) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B') \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A', RB) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RB) \arrow[r, "Rg_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, RB')
\end{tikzcd}$$

<u>Teorema</u>: Una coppia di funtori aggiunti $(L, R) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ determina trasformazioni naturali

1. "unità" $\eta : id_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ t.c. $\tau(f : LA \to B) = Rf \circ \eta_A : A \to RB$
2. "counità" $\varepsilon : LR \Rightarrow id_{\mathcal{B}}$ t.c. $\tau^{-1}(g : A \to RB) = \varepsilon_B \circ Lg : LA \to B$

Inoltre valgono le seguenti identità

$$(*) \quad LA \xrightarrow{L\eta} LRLA \xrightarrow{\varepsilon L} LA, \quad \text{e} \quad RB \xrightarrow{\eta R} RLRB \xrightarrow{R\varepsilon} RB$$

<u>Dim.</u>: Poniamo $\eta = \tau(id_{LA}) : A \to RLA$
e $\varepsilon = \tau^{-1}(id_{RB}) : LRB \to B$, Abbiamo

$$\begin{tikzcd}
(\varepsilon_{LA} : LRLA \to LA) \arrow[r, mapsto, "L\eta_A^*"] & (id_{LA} : LA \to LA) \arrow[r, mapsto, "f_*"] \arrow[d, "\tau"] & (f : LA \to B) \arrow[d, "\tau"] \\
(id_{RLA} : RLA \to RLA) \arrow[r, mapsto, "\eta_A^*"] \arrow[u, "\tau^{-1}"] & (\eta_A : A \to RLA) \arrow[r, mapsto, "Rf_*"] & (Rf \circ \eta_A : A \to RB)
\end{tikzcd}$$

Il diagramma commuta per definizione, quindi 1. segue. (2. è analoga), insieme a $*$. □

Risoluzioni canoniche

<u>Def:</u> Una <u>cotripla</u> $(\perp, \varepsilon, \delta)$ su una categoria $\mathcal{A}$ è un funtore $\perp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ insieme a trasformazioni naturali $\varepsilon : \perp A \Rightarrow id_{\mathcal{A}}$ e $\delta : \perp \Rightarrow \perp\perp$ tale che per ogni oggetto A in $\mathcal{A}$ i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd}
\perp A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\delta_A"'] & \perp(\perp A) \arrow[d, "\delta_{\perp A}"] \\
\perp(\perp A) \arrow[r, "\perp\delta_A"] & \perp(\perp\perp A) = \perp\perp(\perp A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \perp A \arrow[dl, "="'] \arrow[d, "\delta_A"] \arrow[dr, "="] & \\
\perp A & \perp(\perp A) \arrow[l, "\perp\varepsilon_A"'] \arrow[r, "\varepsilon_{\perp A}"] & \perp A
\end{tikzcd}$$

$\boxed{(\perp\delta)\delta = (\delta\perp)\delta}$ $\qquad$ $\boxed{(\perp\varepsilon)\delta = id = (\varepsilon\perp)\delta}$

Siano (U, F) una coppia di funtori aggiunti $\mathcal{B} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$, siano $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow UF$ unità, e $\varepsilon : FU \Rightarrow id_{\mathcal{B}}$ counità della coppia.

Definiamo $\delta : FU \Rightarrow FUFU$ trasf. nat. ponendo

$$\delta_B = F\eta_{UB} : FUB \longrightarrow FUFUB$$

Dalle proprietà $*$ abbiamo che

$$\varepsilon F \circ F\eta : FC \longrightarrow FC \quad \text{è l'identità}$$

e seguono gli assiomi di cotripla per $\perp = FU : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Data una cotripla $\perp$ in $\mathcal{A}$ e un oggetto A in $\mathcal{A}$ possiamo costruire un oggetto simpliciale $\perp_* A$ come segue:

- $\perp_n A = \perp^{n+1} A$
- $\partial_i = \perp^i \varepsilon \perp^{n-i} : \perp^{n+1} A \longrightarrow \perp^n A$

  $\sigma_i = \perp^i \delta \perp^{n-i} : \perp^{n+1} A \longrightarrow \perp^{n+2} A$

Dagli assiomi di cotripla discende che $\perp_* A$ è un oggetto simpliciale (sono soddisfatte le identità simpliciali)

<u>Def:</u> Sia $\perp$ una cotripla in una categoria $\mathcal{A}$. Un oggetto A in $\mathcal{A}$ si dice $\perp$-proiettivo se $\varepsilon_A : \perp A \longrightarrow A$ ha una sezione ($f : A \longrightarrow \perp A$ t.c. $\varepsilon_A f = id_A$).

Se (F, U) è una coppia di funtori aggiunti $\mathcal{B} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ e $\perp = FU$ allora ogni oggetto di tipo FC è $\perp$-proiettivo, infatti:

$$FC \xrightarrow{F\eta_C} FUFC \xrightarrow{\varepsilon_{FC}} FC$$

è l'~~identità~~ (dalle proprietà $*$ di unità e counità)

Quindi $F\eta_C : FC \longrightarrow FUFC$ è sezione di ε_{FC}.

<u>Teorema</u> (sollevamento $\perp$-proiettivo): Sia $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funtore dotato di un aggiunto sx F, e sia $\perp = FU$. Un oggetto P è $\perp$-proiettivo sse soddisfa la <u>proprietà del sollevamento $\perp$-proiettivo</u>

- data $g : A_1 \to A_2$ in $\mathcal{A}$ t.c. $Ug : UA_1 \to UA_2$ è suriettiva spezzante e una mappa $\gamma : P \to A_2$ esiste $\beta : P \to A_1$ t.c. $\gamma = g\beta$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A_1 \arrow[rr, "g"] & & A_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} UA_1 \arrow[r, "Ug"] & UA_2 \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Dim.:</u> Sia P oggetto in $\mathcal{A}$ che soddisfa la proprietà del sollevamento $\perp$-proiettivo. Consideriamo $\varepsilon_P : FUP \to P$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[dr, "id_P"] & \\ FUP \arrow[rr, "\varepsilon_P"] & & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} UFUP \arrow[r, "U\varepsilon_P"] & UP \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\eta U"] & 0 \end{tikzcd}$$

$U\varepsilon \circ \eta U$ è l'identità per la proprietà $*$ di unità e counità. Quindi $\exists\ \beta : P \to FUP$ t.c. $id_P = \varepsilon_P \circ \beta$, quindi ε_P ha una sezione.

Viceversa sia P $\perp$-proiettivo. Sostituiamo P con FUP

$$\begin{tikzcd} FUP \arrow[r, bend left, "\varepsilon_P"] \arrow[d, "\gamma"] & P \arrow[l, bend left, "\xi"] \\ A_1 \arrow[r, "g"] & A_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} UA_1 \arrow[r, "Ug"] & UA_2 \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 0 \end{tikzcd}$$

Osserviamo che $Hom(UP, UA_1) \xrightarrow{(Ug)^*} Hom(UP, UA_2)$ è suriettiva spezzante, e poiché $Hom(UP, UA) \cong Hom(FUP, A)$ anche $Hom(FUP, A_1) \to Hom(FUP, A_2)$ è suriettiva spezzante. $\square$

Proposizione (risoluzione canonica): Sia $\perp$ una cotripla in una categoria abeliana $\mathcal{A}$. Se A è un oggetto $\perp$-proiettivo in $\mathcal{A}$ allora l'oggetto simpliciale aumentato $\perp_* A \xrightarrow{\varepsilon} A$ è asferico, e il complesso associato aumentato è esatto

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\varepsilon} \perp A \xleftarrow{\partial_0 - \partial_1} \perp^2 A \xleftarrow{d} \cdots$$

Dim.: Usando il criterio di asfericità costruiamo mappe che rendono $\perp_* A \to A$ contraibile, ~~quindi~~ da cui segue la tesi.

Poniamo:

$$\begin{cases} f_{-1} = f & (\text{sezione di } \varepsilon_A) \\ f_n = \perp^{n+1} f : \perp^{n+1} A \to \perp^{n+2} A \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\partial_{n+1} f_n = \perp^{n+1}(\varepsilon f) = id$$

$$\partial_0 f_0 = (\varepsilon \perp)(\perp f) = f \varepsilon$$

Se $n \geq 1$ e $0 \leq i < n+1$ ponendo $B = \perp^{n-i} A$ e $g = \perp^j f$ abbiamo

$$\partial_i f_n = (\perp^i \varepsilon_{\perp B})(\perp^i \perp g) = (\perp^i g)(\perp^i \varepsilon_B) = f_{n-1} \partial_i .$$

$\square$

Corollario: Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funtore dotato di aggiunto sx $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Allora per ogni C in $\mathcal{C}$ l'oggetto simpliciale aumentato $\perp_*(FC) \to FC$ è contraibile, quindi asferico in $\mathcal{A}$.

Proposizione: Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, $U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funtore dotato di un aggiunto sx $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Allora per ogni oggetto A in $\mathcal{A}$ l'oggetto simpliciale aumentato $U(\perp_* A) \xrightarrow{U\varepsilon} UA$ è contraibile a sx, quindi asferico.

Dim.: Sia $\begin{cases} f_{-1} = \eta U : UA \to UFUA = U(\perp A) \\ f_n = \eta U \perp^n \end{cases}$

$\square$

Omologia cotripla

~~Def~~: Sia $\mathcal{A}$ una categoria, e sia $\perp = (\perp, \varepsilon, \delta)$ una cotripla in $\mathcal{A}$. Sia $E : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ un funtore, con $\mathcal{M}$ categoria abeliana. Per ogni oggetto A in $\mathcal{A}$ possiamo considerare l'oggetto simpliciale aumentato $E(\perp_* A) \to E(A)$ in $\mathcal{M}$.

Def.: L'omologia cotripla di A con coefficienti in E è la successione degli oggetti

$$H_n(A; E) := \pi_n(E(\perp_* A)).$$

Dalla corrispondenza di Dold-Kan è l'omologia del complesso associato $C(E\perp_* A)$

$$0 \leftarrow E(\perp A) \xleftarrow{d} E(\perp^2 A) \xleftarrow{d} \cdots$$

Def.: Sia $\perp$ una cotripla fissata su $\mathcal{A}$, e $\mathcal{M}$ una categoria abeliana. Una teoria di funtori $\perp$-derivati a sx (L_n, λ, ∂) è l'assegnazione a ogni funtore $E : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ di una successione di funtori $L_n E : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, naturale in E, insieme a una trasformazione naturale $\lambda : L_0 E \Rightarrow E$ t.c.

1. $\lambda : L_0(E\perp) \cong E\perp$ e $L_n(E\perp) = 0$ $\forall n \neq 0$ e ogni E
2. Per ogni succ. esatta corta $\mathcal{E} : 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ di funtori t.c. $0 \to E'\perp \to E\perp \to E''\perp \to 0$ è esatta esistono "morfismi di connessione" $\partial : L_n E'' \to L_{n-1} E'$, naturali in $\mathcal{E}$, t.c.

$$\cdots \to L_n E' \to L_n E \to L_n E'' \xrightarrow{\partial} L_{n-1} E' \to L_{n-1} E \to L_{n-1} E'' \to \cdots$$

è esatta.

Teorema (di unicità): L'omologia cotripla $H_*(-;E)$ è una teoria di funtori $\perp$-derivati a sx. Inoltre se (L_n, λ, ∂) è un'altra teoria di funtori $\perp$-derivati a sx allora esistono isomorfismi $L_n E \cong H_n(-;E)$, naturali in E, sotto i quali λ corrisponde a ε, e ∂ corrisponde ai morfismi di connessione per $H_*(-;E)$.

Dim.: Formalmente simile all'analoga per i δ-funtori universali sulla categoria di funtori $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}$, dove $E\perp$ giace il ruolo dei proiettivi. $\square$