

Oggetti simpliciali aumentati

Def: Un oggetto ~~aumentato~~ simpliciale aumentato in una categoria \mathcal{A} è un oggetto simpliciale A_* insieme a un morfismo $\varepsilon: A_0 \rightarrow A_{-1}$, con A_{-1} oggetto fissato, t.c. $\varepsilon \partial_0 = \varepsilon \partial_1$.

Se $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ è un oggetto simpliciale aumentato in una categoria abeliana \mathcal{A} , possiamo aumentare i complessi CA e NA :

$$0 \leftarrow A_{-1} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} \dots$$

Def: Un oggetto simpliciale aumentato $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ in una categoria \mathcal{A} si dice asterico se $\pi_n(A_*) = 0$ per $n \neq 0$ e $\varepsilon: \pi_0(A_*) \cong A_{-1}$ (Se \mathcal{A} è una categoria abeliana CA e NA sono risoluzioni di A_{-1} .)

Def: Un oggetto simpliciale aumentato $A_* \xrightarrow{\varepsilon} A_{-1}$ in una categoria \mathcal{A} si dice contraibile a dx se esistono morfismi $f_n: A_n \rightarrow A_{n+1}$ ($n \geq -1$) tali che:

$$\begin{cases} \varepsilon f_{-1} = \text{id} \\ \partial_{n+1} f_n = \text{id} & n \geq 0 \\ \partial_0 f_0 = f_{-1} \varepsilon \\ \partial_i f_n = f_{n-1} \partial_i & 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Si dice contraibile a sx se esistono morfismi $f_n: A_n \rightarrow A_{n+1}$ tali che

$$\begin{cases} \varepsilon f_{-1} = \text{id} \\ \partial_0 f_n = \text{id} & n \geq 0 \\ \partial_1 f_0 = f_{-1} \varepsilon \\ \partial_i f_n = f_{n-1} \partial_{i-1} & 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

~~Def:~~

Proposizione (criterio di asfericit )

1. Se \mathcal{A}   una categoria abeliana ogni oggetto simpliciale aumentato contraibile   asferico, e il suo complesso associato aumentato si spezza esatto
2. Sia \mathcal{A}   la categoria dei Set e X   un insieme simpliciale fibrante con punto base x , e $\varepsilon: X \rightarrow X_{-1}$   un aumento. Se $X \xrightarrow{\varepsilon} X_{-1}$   contraibile a dx o a x e $f_n(x) = x$ per ogni n , allora X   asferico.

Dim.: (1) $A_{-1} \xleftarrow{\varepsilon} A_0 \xleftarrow{d} A_1 \xleftarrow{d} \dots$

• $\pi_0(A_x) \cong A_{-1} : \pi_0(A_x) = \frac{A_0}{(\partial_0 - \partial_1)A_1}$

$$\frac{A_0}{(\partial_0 - \partial_1)A_1} \xrightarrow{\varepsilon_x} A_{-1}$$

$$x + (\partial_0 - \partial_1)A_1 \mapsto \varepsilon x \quad \text{  un isomorfismo}$$

$$f_{-1}x + (\partial_0 - \partial_1)A_1 \mapsto x$$

$$\hookrightarrow \varepsilon f_{-1}x = x$$

• $\pi_n(A_x) = 0 \quad n > 0 : \pi_n(A_x) = \frac{\ker d}{dA_{n+1}}$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i x = 0 \Rightarrow f_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i x \right) = 0$$

$$\text{Quindi } x = x + \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{n-1} \partial_i x = x + \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i (f_n x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i (f_n x) = d(f_n x)$$

• $\mathcal{C}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{-1}$ spezza esatto:

$$d f_{n+1} + f_n d = \text{id}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i f_{n+1} + f_n \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_n \partial_i + f_n \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i + (-1)^{n+1} \text{id} \quad \text{Quindi } \{(-1)^i \partial_i\} \text{ spezza } \square$$

Functori aggiunti

Def: ~~Una coppia~~ Due funtori $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $R: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ si dicono aggiunti se esiste una biiezione per ogni oggetto A in \mathcal{A} e B in \mathcal{B}

$$\tau = \tau_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RB)$$

che è "naturale" in A e in B . Cioè date $f: A \rightarrow A'$ e $g: B \rightarrow B'$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(LA', B) & \xrightarrow{Lf^*} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, B') \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A', RB) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RB) & \xrightarrow{Rg_*} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, RB') \end{array}$$

Teorema: Una coppia di funtori aggiunti $(L, R): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ determina trasformazioni naturali

1. "unità" $\eta = \text{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ t.c. $\tau(f: LA \rightarrow B) = Rf \circ \eta_A : A \rightarrow RB$
2. "comità" $\varepsilon = LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}}$ t.c. $\tau^{-1}(g: A \rightarrow RB) = \varepsilon_B \circ Lg : LA \rightarrow B$

Inoltre valgono le seguenti identità:

$$(*) \quad LA \xrightarrow{L\eta} LRLA \xrightarrow{\varepsilon L} LA, \quad \text{e} \quad RB \xrightarrow{\eta R} RLRB \xrightarrow{R\varepsilon} RB$$

Dim: Poniamo $\eta = \tau(\text{id}_{LA}) : A \rightarrow RL A$

e $\varepsilon = \tau^{-1}(\text{id}_{RB}) : LRB \rightarrow B$, Abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} (\varepsilon_{LA} : LRLA \rightarrow LA) & \xrightarrow{L\eta_A^*} & (\text{id}_{LA} : LA \rightarrow LA) & \xrightarrow{f^*} & (f : LA \rightarrow B) \\ \uparrow \tau^{-1} & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ (\text{id}_{RLA} : RLA \rightarrow RLA) & \xrightarrow{\eta_A^*} & (\eta_A : A \rightarrow RL A) & \xrightarrow{Rf^*} & (Rf \circ \eta_A : A \rightarrow RB) \end{array}$$

Il diagramma commuta per definizione, quindi 1. segue (2. è analoga) + insieme a *.

Teoria delle Risoluzioni canoniche

Def: Una cotripla $(\perp, \varepsilon, \delta)$ su una categoria \mathcal{A} è un funtore $\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ insieme a trasformazioni naturali $\varepsilon: \perp A \Rightarrow \text{id}_A$ e $\delta: \perp \Rightarrow \perp \perp$ tale che per ogni oggetto A in \mathcal{A} i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{array}{ccc} \perp A & \xrightarrow{\delta_A} & \perp(\perp A) \\ \downarrow \delta_A & & \downarrow \delta_{\perp A} \\ \perp(\perp A) & \xrightarrow{\perp \delta_A} & \perp(\perp(\perp A)) = \perp \perp(\perp A) \end{array}$$

$$\boxed{(\perp \delta) \delta = (\delta \perp) \delta}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \perp A & & \\ & \swarrow = & \downarrow \delta_A & \searrow = & \\ \perp A & \xrightarrow{\perp \varepsilon_A} & \perp(\perp A) & \xrightarrow{\varepsilon_{\perp A}} & \perp A \end{array}$$

$$\boxed{(\perp \varepsilon) \delta = \text{id} = (\varepsilon \perp) \delta}$$

Siano (U, F) una coppia di funtori aggiunti $\mathcal{B} \xrightleftharpoons[U]{F} \mathcal{C}$, siano $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow UF$ unità, e $\varepsilon: FU \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}}$ counità della coppia.

Definiamo $\delta: FU \Rightarrow FU FU$ transf. nat. ponendo

$$\delta_B = F \eta_{UB}: FU B \rightarrow FUFU B$$

Dalle proprietà * abbiamo che

$$\varepsilon F \circ F \eta: FC \rightarrow FC \text{ è l'identità}$$

e seguano gli assiomi di cotripla per $\perp = FU: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

Data una cotripla \perp in \mathcal{A} e un oggetto A in \mathcal{A} possiamo costruire un oggetto simpliciale $\perp_* A$ come segue:

- $\perp_n A = \perp^{n+1} A$

- $d_i = \perp^i \varepsilon \perp^{n-i} : \perp^{n+1} A \rightarrow \perp^n A$

- $\sigma_i = \perp^i \delta \perp^{n-i} : \perp^{n+1} A \rightarrow \perp^{n+2} A$

Dagli assiomi di cotripla discende che $\perp_* A$ è un oggetto simpliciale (sono soddisfatte le identità simpliciali).

Def: Sia \perp una cotripla in una categoria \mathcal{A} . Un oggetto A in \mathcal{A} si dice \perp -proiettivo se $\varepsilon_A : \perp A \rightarrow A$ ha una sezione ($f : A \rightarrow \perp A$ t.c. $\varepsilon_A f = \text{id}_A$).

Se (F, U) è una coppia di funtori aggiunti $B \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{U} \\ \xrightarrow{C} \end{matrix}$ e $\perp = FU$ allora ogni oggetto di tipo FC è \perp -proiettivo, infatti:

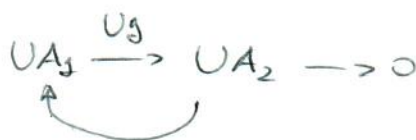
$$FC \xrightarrow{\bar{F}_C} FUFC \xrightarrow{\varepsilon_{FC}} FC$$

e l'identità (dalle proprietà * di unità e comunità)

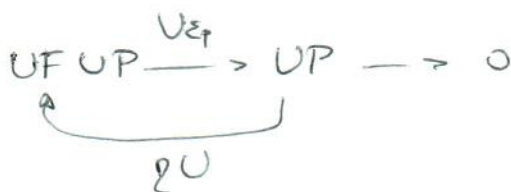
Quindi $\bar{F}_C : FC \rightarrow FUFC$ è sezione di ε_{FC} .

Teorema (sollevamento \perp -proiettivo): Sia $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore dotato di un aggiunto \ast F , e sia $L = FU$. Un oggetto P è \perp -proiettivo se soddisfa la proprietà del sollevamento \perp -proiettivo

• data $g: A_1 \rightarrow A_2$ in \mathcal{A} t.c. $Ug: UA_1 \rightarrow UA_2$ è suriettiva spezzante e una mappa $\gamma: P \rightarrow A_2$ esiste $\beta: P \rightarrow A_1$ t.c. $\gamma = g\beta$.

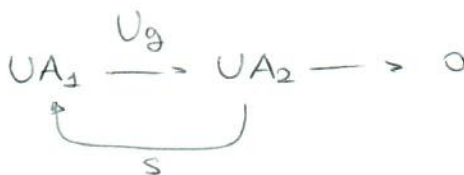
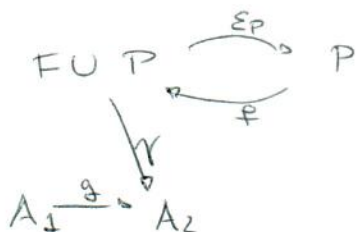


Dim.: Sia P oggetto in \mathcal{A} che soddisfa la proprietà del sollevamento \perp -proiettivo. Consideriamo $\varepsilon_P: FUP \rightarrow P$



$U\varepsilon \circ \eta U$ è l'identità per la proprietà \ast di unità e comità. Quindi $\exists \beta: P \rightarrow FUP$ t.c. $\text{id}_P = \varepsilon_P \circ \beta$, quindi ε_P ha una sezione.

Viceversa sia P \perp -proiettivo. Sostituiamo P con FUP



Osserviamo che $\text{Hom}(UP, UA_1) \xrightarrow{(Ug)^\ast} \text{Hom}(UP, UA_2)$ è suriettiva spezzante, e poiché $\text{Hom}(UP, UA) \cong \text{Hom}(FUP, A)$ anche $\text{Hom}(FUP, A_1) \rightarrow \text{Hom}(FUP, A_2)$ è suriettiva spezzante. \square

Proposizione (risoluzione canonica): Sia \perp una cotripla in una categoria abeliana \mathcal{A} . Se A è un oggetto \perp -proiettivo in \mathcal{A} allora l'oggetto simpliciale aumentato $\perp_* A \xrightarrow{\varepsilon} A$ è asferico, e il complesso associato aumentato è esatto

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\varepsilon} \perp A \xleftarrow{\partial_0} \perp^2 A \xleftarrow{\partial_1} \perp^3 A \xleftarrow{\partial_2} \dots$$

Dim.: Usando il criterio di asfericità costruiamo mappe che rendono $\perp_* A \rightarrow A$ contraibile, quindi da cui segue la tesi.

Poniamo:

$$\begin{cases} f_{-1} = f & (\text{sezione di } \varepsilon_A) \\ f_n = \perp^{n+1} f : \perp^{n+1} A \rightarrow \perp^{n+2} A \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\partial_{n+1} f_n = \perp^{n+1} (\varepsilon f) = \text{id}$$

$$\partial_0 f_0 = (\varepsilon \perp) (\perp f) = f \varepsilon$$

Se $n \geq 1$ e $0 \leq i < n+1$ ponendo $B = \perp^{n-i} A$ e $g = \perp^i f$ abbiamo

$$\partial_i f_n = (\perp^i \varepsilon_{\perp B}) (\perp^i \perp g) = (\perp^i g) (\perp^i \varepsilon_B) = f_{n-1} \partial_i.$$

Corollario: Sia \mathcal{A} una categoria abeliana, $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore dotato di aggiunto sx $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Allora per ogni C in \mathcal{C} l'oggetto simpliciale aumentato $\perp_*(FC) \rightarrow FC$ è contraibile, quindi asferico in \mathcal{A} .

Proposizione: Sia \mathcal{A} una categoria abeliana, $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore dotato di un aggiunto sx $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Allora per ogni oggetto A in \mathcal{A} l'oggetto simpliciale aumentato $U(\perp_* A) \xrightarrow{U\varepsilon} UA$ è contraibile a sx , quindi asferico.

Dim.: Sia $\begin{cases} f_{-1} = \eta U: UA \rightarrow UFUA = U(\perp A) \\ f_n = \eta U \perp^n \end{cases}$

□

Omologia cotripla

~~Sia~~ Sia \mathcal{A} una categoria, e sia $\perp = (\perp, \varepsilon, \delta)$ una cotripla in \mathcal{A} . Sia $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ un funtore, con \mathcal{M} categoria abeliana.

Per ogni oggetto A in \mathcal{A} possiamo considerare l'oggetto simpliciale aumentato $E(\perp_* A) \rightarrow E(A)$ in \mathcal{M} .

Def.: L'omologia cotripla di A con coefficienti in E è la successione degli oggetti

$$H_n(A; E) := \pi_n(E(\perp_* A))$$

Dalla corrispondenza di Dold-Kan e l'omologia del complesso associato $(E(\perp_* A))$

$$0 \leftarrow E(\perp A) \xrightarrow{d} E(\perp^2 A) \xrightarrow{d} \dots$$

Def.: Sia \perp una cotripla fissata su \mathcal{A} , e \mathcal{M} una categoria abeliana. Una teoria di funtori \perp -derivati a ∞ (L_n, λ, ∂) è l'assegnazione a ogni funtore $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ di una successione di funtori $L_n E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, naturale in E , insieme a una trasformazione naturale $\lambda: L_0 E \Rightarrow E$ A.c.

1. $\lambda: L_0(E) \xrightarrow{\cong} E$ e $L_n(E\perp) = 0 \quad \forall n \neq 0$ e ogni E

2. Per ogni succ. esatta corta $\mathcal{E}: 0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ di funtori A.c. $0 \rightarrow E'\perp \rightarrow E\perp \rightarrow E''\perp \rightarrow 0$ è esatta esistono "morfismi di connessione" $\partial: L_n E'' \rightarrow L_{n+1} E'$, naturali in \mathcal{E} , t.c.

$$\dots \rightarrow L_n E' \rightarrow L_n E \rightarrow L_n E'' \xrightarrow{\partial} L_{n+1} E' \rightarrow L_{n+1} E \rightarrow L_{n+1} E'' \rightarrow \dots$$

è esatta.

Teorema (di unicità): L' analogia cotripla $H_*(-; E)$ è una teoria di funtori \perp -derivati a \mathcal{X} . Inoltre se $(L_n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ è un'altra teoria di funtori \perp -derivati a \mathcal{X} allora esistono isomorfismi $L_n E \cong H_n(-; E)$, naturali in E , sotto i quali \mathcal{A} corrisponde a \mathcal{E} , e \mathcal{B} corrisponde ai morfismi di connessione per $H_*(-; E)$.

Dim.: Formalmente simile all' analogo per i δ -funtori universali sulla categoria di funtori \mathcal{M}^A , dove $E \perp$ gioca il ruolo dei proiettivi. \square