Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, “Sapienza” Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

esonero del 19.4.2018

Esercizio 1. Sia E un sottinsieme denso di uno spazio topologico X, e sia $U \subseteq X$ un aperto. Dimostrare che

$$\overline{E \cap U} \supseteq U.$$

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia seguente di sottoinsiemi di $X = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\times]c, d[\mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, 0 < c < d\} \cup \{]a, b[\times [0, +\infty[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

(1) Dimostrare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base.
(2) Determinare la parte interna di $A =]0, 1[\times [0, 1[$ e la chiusura di $C = \{(0, 1)\}$ nella topologia $\mathcal{T}$.
(3) Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è connesso ma non è compatto, né di Hausdorff.
(4) Dimostrare che il sottospazio $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ è compatto.

Esercizio 3. Sia $N \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici nilpotenti (ricordiamo che, per il teorema di Cayley-Hamilton, uma matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è nilpotente se e solo se $A^n = 0$). Dire, motivando la risposta, se N è:

(1) chiuso,
(2) compatto,
(3) connesso.

Esercizio 4. Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$, definiamo

$$A' = \{a + (\cos t, \sin t) \mid a \in A, \ 0 \le t \le \|a\|\}.$$

Dimostrare:

(1) se A è compatto, allora A' è compatto;
(2) se A è chiuso, allora A' è chiuso.

Esercizio 5. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, e la relazione d'equivalenza $\sim$ per cui $x \sim y$ se e solo $x = y$, oppure entrambe le condizioni $x - y \in \mathbb{Z}$ e $x \notin \mathbb{Z}$ sono verificate. Dimostrare che il quoziente $Y = X/\sim$ non è di Hausdorff, e che esiste una identificazione $Y \to S^1$.