Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, “Sapienza” Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

esercizi vari, canale A-L

30.5.2018

Esercizio 1. Sia $f\colon S^n \to S^n$ continua e senza punti fissi. Provare che $f^2 = f \circ f$ è omotopa all'identità.

Esercizio 2. Sia $f\colon S^1 \to S^1$ continua ed omotopa ad una costante. Provare che f possiede punti fissi.

Esercizio 3. Dimostrare che S^2 non è omeomorfo a D^2.

Esercizio 4. Dimostrare che se A è un retratto di D^2, allora ogni applicazione continua $f\colon A \to A$ ha un punto fisso.

Esercizio 5. Sia $p\colon E \to X$ rivestimento, e sia X di Hausdorff. Dimostrare che se E è compatto, allora p ha grado finito, ossia con la fibre insiemi finiti.

Esercizio 6. Sia $p\colon E \to X$ rivestimento di grado finito. Provare che se X soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora p è un'applicazione chiusa. È vero o falso che ogni rivestimento è un'applicazione chiusa?

Esercizio 7. Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento e $f\colon Y \to E$ continua. Sia assuma che i tre spazi X, Y, E siano connessi e localmente connessi per archi. Provare che se $pf\colon Y \to X$ è omotopa ad una costante, allora anche f è omotopa ad una costante.

Esercizio 8. Usando il fatto che le sfere S^n, $n < \infty$, non sono contrattili[1] e gli esercizi precedenti, provare che se $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è omotopa ad una costante, allora possiede punti fissi.

[1] Nel corso l'abbiamo dimostrato per $n = 0, 1$: i rimanenti casi saranno provati nel corso di topologia algebrica della magistrale.