Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, “Sapienza” Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

Prova scritta del 13 luglio 2018
Tempo a disposizione 2 ore.

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{R}^3/\sim$ il quoziente topologico per la relazione di equivalenza $x \sim y$ se $x = y$ oppure se $\|x\| = \|y\| > 4$. Dire, motivando la risposta se X è:

(1) connesso,
(2) compatto,
(3) di Hausdorff,
(4) a base numerabile.

Dire inoltre se la proiezione al quoziente $\mathbb{R}^3 \to X$ è un'applicazione aperta.

Esercizio 2. Sia $S \subset M_{3,3}(\mathbb{C})$ il sottoinsieme delle matrici diagonalizzabili. Dire, motivando la risposta, se S è:

(1) chiuso,
(2) aperto,
(3) limitato,
(4) connesso.

Esercizio 3. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$, definiamo $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ come

$$d(p_1, p_2) = \begin{cases} |x_1 - x_2| & \text{se } y_1 = y_2 \\ 2 & \text{se } y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

per ogni $p_1 = (x_1, y_1) \in X$ e $p_2 = (x_2, y_2) \in X$. Dimostrare che

(1) d è una distanza su X, e che
(2) con la topologia indotta da d lo spazio X è localmente compatto,
(3) lo spazio metrico (X, d) è completo,
(4) ma non totalmente limitato.

Esercizio 4. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f^{-1}\left([-a, a]\right)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^4$ per ogni $a > 0$. Dimostrare che f è un'applicazione chiusa.