Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", "Sapienza" Università di Roma

Geometria 2

a.a. 2017/2018

Esame scritto 22.6.2018

Esercizio 1. Siano X e Y spazi topologici, e si considerino sottoinsiemi $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dimostrare che
$$A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$$

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia seguente di sottoinsiemi di $X = \mathbb{R}$:
$$\mathcal{B} = \{[a, b[\mid \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

(1) Dimostrare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base.
(2) Determinare la parte interna e la chiusura di $A =]\frac{1}{2}, 2[$ nella topologia $\mathcal{T}$.
(3) Dire, motivando la risposta, se $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff.

Esercizio 3. Sia $X \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$, l'insieme delle matrici che possiedono un autovalore $\lambda \in [0, 1]$.

(1) Dimostrare che X è chiuso;
(2) Dimostrare che X non è compatto per ogni $n > 1$;
(3) Usando il fatto che per ogni $n > 1$ il gruppo speciale ortogonale $SO(n)$ è connesso, ed agisce transitivamente sulla sfera S^{n-1} (cioè per ogni $p, q \in S^{n-1}$ esiste $A \in SO(n)$ tale che $Ap = q$), provare che X è connesso.[1]

Esercizio 4. Si consideri $X = ([0, +\infty[\times [0, 1]) \ \cup \ (] - \infty, 0] \times \{0\})$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$, e la proiezione $p \colon X \to \mathbb{R}$ sulla prima coordinata. Si dimostri che

(1) p è un'identificazione,
(2) p non è un'applicazione aperta,
(3) p è un'applicazione chiusa.

[1] Commento del 28 giugno 2018: questo suggerimento funziona anche se si richiede che λ appartenga ad un qualunque intervallo della retta reale. Nel caso in cui tale intervallo contiene il numero 0 esistono metodi di dimostrazione più semplici.