Dipendenza e indipendenza lineare

Corrado Mascia

4 novembre 2018

Qui, ci dedichiamo alla presentazione del concetto di dipendenza (e indipendenza) lineare, per poi passare all'introduzione della *base* di uno spazio vettoriale. Nonché della *base canonica*.

1 Combinazioni lineari

Dati i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ e i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, una loro *combinazione lineare* è un'espressione della forma

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{u}_j.$$

Tanto per capirsi, sono combinazioni lineari cose del tipo

$$3(1, 0) + 2(0, 1) - 11(1, 1), \quad (1, 2, 3) - 2(-1, \pi, 0) + \frac{1}{2}(e, 0, -\sqrt{2})$$

perché si scrivono come $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3$, scegliendo, nel primo caso,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 1), \\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -11, \end{cases}$$

e, nel secondo caso,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{u}_2 = (-1, \pi, 0), \mathbf{u}_3 = (e, 0, -\sqrt{2}), \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esempio 1.1 È possibile scrivere il vettore $\mathbf{u} = (2, 3)$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$? In altre parole, ci stiamo domandando se esistono coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (2, 3).$$

Sviluppando la combinazione lineare a sinistra si trova

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

e quindi si deduce che la risposta è affermativa, con la scelta $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

Esempio 1.2 È possibile scrivere il vettore $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 3)$? In altre parole, ci stiamo domandando se esistono coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(1, 0, 3) = (1, 0, 1).$$

Sviluppando la combinazione lineare si ottiene

$$\lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(1, 0, 3) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, 2\lambda_1 + 3\lambda_2).$$

Perciò, ci si deve chiedere se esistano λ_1, λ_2 tali che

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1.$$

Due gradi di libertà (corrispondenti ai parametri λ_1 e λ_2) con tre condizioni da soddisfare è davvero troppo poco... In effetti, la risposta è negativa.

Il corrispondente significato geometrico è il seguente. Due vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ nello spazio tridimensionale individuano un piano (quello che li contiene), Nel senso che, al variare di λ_1 e λ_2 si trovano tutti e soli i punti di tale piano. L'unica situazione in cui il vettore $\mathbf{u}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ è quella in cui il vettore $\mathbf{u}$ appartiene proprio a tale piano.

Esempio 1.3 È possibile scrivere il vettore $\mathbf{u} = (6, 12, 24)$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 3)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$? La combinazione lineare corrispondente è

$$\lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(1, 0, 3) + \lambda_3(1, 0, 1) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)$$

che corrisponde al sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 6, \\ \lambda_1 = 12, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 24. \end{cases}$$

La soluzione salta all'occhio: $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = -18$ (...perché?)

Definizione 1.4 Dato un insieme di vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ (o anche in $\mathbb{R}^n$), questi sono **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Altrimenti, si dicono **linearmente indipendenti**.

Ecco un buon criterio pratico per verificare l'indipendenza lineare.

Proposizione 1.5 I vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ vale solo per $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Dimostrazione. Si tratta di “se e solo se”, dunque doppia implicazione.

Se. Cosa succede se si scelgono $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$? È evidente: la combinazione lineare $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k$ fornisce il vettore nullo $\mathbf{0}$.

Solo se. Per l'altra implicazione, occorre lavorare leggermente di più (...non sarete mica stanchi, no?) Supponiamo che ci sia almeno un coefficiente λ_j diverso da zero e, senza perdere in generalità, possiamo supporre che sia il primo: quindi, $\lambda_1 \neq 0$. Allora, si ha

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \mathbf{u}_k,$$

che esprime in tutto il suo splendore che i vettori sono linearmente dipendenti.

q.e.d.

Consideriamo il caso di un insieme costituito da un solo vettore. Come si pone rispetto alla nozione di dipendenza o indipendenza lineare? Se il vettore $\mathbf{u}$ è diverso dal vettore nullo $\mathbf{0}$, una combinazione lineare di $\mathbf{u}$ è

semplicemente una dilatazione del vettore nello spazio ambiente, $\lambda \mathbf{u}$. Se si impone l'uguaglianza

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

questa è verificata se e solo se $\lambda = 0$. Quindi, ogni singolo vettore $\mathbf{u}$ non-nullo è indipendente. Se invece il vettore $\mathbf{u}$ è il vettore nullo, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, allora l'uguaglianza $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$ è verificata *per ogni scelta* di $\lambda \in \mathbb{R}$. Motivo per cui l'unico caso di sistema composto da un solo vettore che sia dipendente è quello del vettore nullo. In tutti gli altri casi, il sistema è linearmente indipendente.

2 Base di uno spazio vettoriale

Definizione 2.1 *Un insieme di vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ si chiama **base dello spazio vettoriale** (o, semplicemente, **base**) se*

1. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ sono linearmente indipendenti;
2. ogni elemento $\mathbf{u}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

La prima condizione si può verificare utilizzando il criterio descritto nella Proposizione 1.5. Per la seconda condizione, bisogna mostrare che per ogni vettore $\mathbf{u}$, fissato arbitrariamente, esistono coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{u}_j.$$

Proviamo a cercare una base di $\mathbb{R}^2$. Per prima cosa, scegliamo un vettore $\mathbf{u}$ a vostro gradimento¹. Ora cerchiamo un secondo vettore che sia indipendente rispetto a questo. Dunque, dobbiamo scegliere $\mathbf{u}_2$ in modo da evitare che valga la relazione

$$\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1.$$

Come sono fatti i vettori della forma $\lambda \mathbf{u}_1$? Questi definiscono la retta passante per l'origine e con la direzione individuata dal vettore $\mathbf{u}_1$. Ad esempio,

¹Ricordate che il vettore nullo $\mathbf{u}$ non è una buona scelta!

se si sceglie $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, tutti i vettori della forma $\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_1 = (\lambda, \lambda)$ sono tali che la coppia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ è linearmente dipendente. Dunque, da escludere.

Dato che la definizione di indipendenza lineare è proprio complementare a quella di dipendenza, bisogna scegliere $\mathbf{u}_2$ in modo che si abbia $\mathbf{u}_2 \neq \lambda\mathbf{u}_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Scritto in altre parole, il vettore $\mathbf{u}_2$ non deve appartenere alla retta individuata da $\mathbf{u}_1$.

Esempio 2.2 Cerchiamo una base di $\mathbb{R}^2$ che contenga il vettore $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$. Bisogna dunque escludere tutti i vettori della forma $(\lambda, -\lambda)$. Quindi, è possibile scegliere $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ ed avere quindi definita una base di $\mathbb{R}^2$. Allo stesso modo si sarebbe potuto scegliere anche $(2, 1)$ o $(1, 2)$ o quel che volete voi. C'è ampia libertà di scelta.

Perfetto. Fissiamo i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ e proviamo a capire se può esistere un terzo vettore $\mathbf{u}_3$ linearmente indipendente da questi. Come accennato in precedenza, i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ nel piano generano tutto il piano stesso. Di conseguenza, ogni altro vettore $\mathbf{u}_3$ deve necessariamente essere scrivibile come combinazione lineare dei primi due. Vediamolo in formule

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \lambda_1(1, -1) + \lambda_2(1, 1) = (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2).$$

Date le coordinate (x, y) del vettore $\mathbf{u}_3$, si devono trovare λ_1 e λ_2 tali che

$$\mathbf{u}_3 = (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) \quad \iff \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases}$$

Quindi

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(x - y), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(x + y).$$

Se volete fare una prova, ...accomodatevi.

Tra le tante basi esistenti, ne esiste una che costituisce una scelta preferenziale. Per questo motivo, è anche nota come **base canonica**.

Un passo alla volta. Partiamo dal caso del piano descritto quindi da $\mathbb{R}^2$. La base canonica di $\mathbb{R}^2$ è costituita da 2 vettori, che sono $(1, 0)$ e $(0, 1)$. A seconda dei casi, dei contesti, ma, soprattutto, dei gusti, si usano diversi tipi di notazioni: le più comuni sono $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Per convincerci che si tratta effettivamente di una base dello spazio vettoriale verifichiamo prima di tutto la condizione di indipendenza. Supponiamo che si abbia $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Scrivendo la relazione in coordinate, si deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e quindi l'indipendenza lineare è dimostrata.

Ora dedichiamoci al punto 2. Fissiamo un vettore arbitrario $\mathbf{u} = (x, y)$ e cerchiamo λ, μ tali che si abbia

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j} \quad \iff \quad (x, y) = \lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (\lambda, \mu).$$

L'inversione è banale: $\lambda = x$ e $\mu = y$. Quindi, nella base canonica, i coefficienti della combinazione lineare coincidono con le coordinate del vettore.

Nel caso dello spazio, in cui si ha $\mathbb{R}^3$. In questo caso, la base canonica è costituita da 3 vettori, che sono $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, indicati, rispettivamente, con i simboli $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, o con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Anche in questa situazione, è possibile verificare che i vettori sono indipendenti e che generano tutto lo spazio tridimensionale.

Infine, per lo spazio n -dimensionale $\mathbb{R}^n$, i vettori della base canonica sono la generalizzazione naturale di quanto visto nei casi precedenti, con il vettore $\mathbf{e}_k$ che ha tutte le componenti nulle salvo la k -esima che è uguale a 1. Anche qui, la verifica dell'indipendenza lineare e della generazione di tutto lo spazio è immediata. Così come il significato dei parametri della