Formule di derivazione

Corrado Mascia

14 dicembre 2018

Qui vengono presentate alcune formule di derivazione ed, al contempo, si mostrano vari esempi del loro utilizzo.

1 Linearità, prodotto e rapporto

Come da titolo della Sezione...

1.1 Linearità

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se le funzioni f e g sono derivabili, anche la loro combinazione lineare $\lambda f + \mu g$ è derivabile. Inoltre, vale l'identità

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) = \lambda \frac{df}{dx}(x) + \mu \frac{dg}{dx}(x), \tag{1}$$

la quale, a parole, indica che *la derivata della combinazione lineare è la combinazione lineare delle derivate*. Simpatico scioglilingua che sta ad indicare che è possibile, in maniera intercambiambile, effettuare prima la combinazione lineare e poi applicare l'operazione, così come il viceversa.

Per la dimostrazione, basta ricorrrere all'uso del raporto incrementale. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\Delta\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) &= \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) - \left(\lambda f(x_0) + \mu g(x_0)\right)\\ &= \lambda\left(f(x) - f(x_0)\right) + \mu\left(g(x) - g(x_0)\right)\\ &= \lambda \Delta f + \mu \Delta g,\end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{\Delta\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)}{\Delta x} = \frac{\lambda \Delta f + \mu \Delta g}{\Delta x} = \lambda \frac{\Delta f}{\Delta x} + \mu \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Supponendo f e g derivabili, cioè assumendo l'esistenza dei limiti

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad \frac{dg}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta g}{\Delta x},$$

e ricordando la proprietà di linearità del limite, si deduce la formula (1).

Esempio 1.1 Consideriamo il caso $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \cos x$. Entrambe sono funzioni derivabili e, pertanto, anche la combinazione lineare $2f(x) - 3g(x)$ è derivabile. Inoltre, vale la formula

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(2(x^2+1) - 3\cos x\big) &= 2\frac{d}{dx}(x^2+1) - 3\frac{d}{dx}(\cos x)\\ &= 2 \cdot 2x - 3(-\sin x) = 4x + 3\sin x.\end{aligned}$$

La scelta dei parametri $\lambda = 2$ e $\mu = -3$ è puramente indicativa e possono essere sostituiti con qualsiasi altra coppia di possibili valori.

Più in generale, iterando la formula (1), si deduce la validità di

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{df_k}{dx}(x),$$

vera nel caso di funzioni $f_1, \ldots, f_n$ che siano tutte derivabili.

1.2 Derivata del prodotto e del rapporto

Lo scambio delle operazioni "limite del rapporto incrementale" e "prodotto/rapporto" non è (quasi mai) valido...

Se le funzioni f e g sono derivabili, anche il loro prodotto $f \cdot g$ è derivabile e vale la formula

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \frac{df}{dx}(x)\, g(x) + f(x)\, \frac{dg}{dx}(x). \tag{2}$$

Come nei casi precedenti, la dimostrazione si basa sull'uso del rapporto incrementale e, per una banalissima questione di tempo, non viene fornita in questa sede. Più significativo è vedere come si applica nella pratica.

Esempio 1.2 Consideriamo il caso $f(x) = x$ e $g(x) = \sin x$. Applicando la formula (2) si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \cdot \sin x) &= \frac{dx}{dx}\sin x + x\frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x \\ &= \sin x + x\cos x.\end{aligned}$$

Analogamente, se le funzioni f e g sono derivabili, anche il loro rapporto f/g è derivabile (quando è definito). In particolare, vale la formula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df}{dx}(x)\,g(x) - f(x)\frac{dg}{dx}(x)}{g(x)^2}. \tag{3}$$

Esempio 1.3 Applicando la formula (3) alla coppia $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, si deduce

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{d1}{dx}\,x - 1\,\frac{dx}{dx}}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Non a caso ritroviamo quando determinato già in passato ricordando la validità della formula di derivazione per la funzione $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha = -1$.

Esempio 1.4 Se le funzioni f e g sono date, rispettivamente da x e $1 + x^2$, per la derivata di f/g si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) &= \frac{\frac{dx}{dx}(1+x^2) - x\,\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

Buono a sapersi...

2 Composizione ed inversione

Come da titolo della Sezione...

2.1 Derivata della funzione composta

La formula di derivazione della funzione composta è leggermente più complicata. Supponiamo di star lavorando con due funzioni f e g con dominio ed immagine coincidenti con $\mathbb{R}$. Allora, vale la composizione $f \circ g$ è derivabile e si ha

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x). \tag{4}$$

Qui, l'argomento della funzione f è stato indicato con la lettera y per sottolineare il fatto che va calcolato nel valore $y = g(x)$ (e non in x).

Esempio 2.1 Nel caso $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$, la composizione $f \circ g$ è data da $h(x) := (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$ definita in $I = \mathbb{R}$. Di conseguenza, la funzione h è derivaibile e la sua derivata vale

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{d\sin(y)}{dy}\bigg|_{y=x^2} \frac{d}{dx}(x^2) = \cos y\big|_{y=x^2} \cdot 2x = 2\,x\,\cos(x^2).$$

Invertendo l'ordine della composizione, il risultato, in generale, cambia. Ad esempio, nel caso precedente si trova quanto segue

Esempio 2.2 La composizione $g \circ f$ è data da

$$k(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin x \cdot \sin x = \sin^2 x,$$

e, pertanto, la derivata è pari a

$$\frac{dk}{dx}(x) = \frac{d}{dy}(y^2)\bigg|_{y=\sin x} \frac{d}{dx}(\sin x) = 2y\big|_{y=\sin x} \cdot \cos x = 2\,\sin x \cos x.$$

A riprova del fatto che, in generale, l'operazione di composizione non è un'operazione commutativa.

2.2 Derivata della funzione inversa

Infine, resta fuori il caso della funzione inversa. Come detto in passato, la funzione inversa f^{-1} è la funzione che "riporta in ordine quanto messo in disordine dalla funzione f...", cioè è quella funzione tale che

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

cioè, indicata con ι la funzione identità, $\iota(x) := x$, quella per cui si ha

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota.$$

Utilizzando la formula (4), si deducono, allo stesso tempo,

$$\frac{d}{dx}(f \circ f^{-1})(x) = \frac{d}{dy} f\Big|_{y=f^{-1}(x)} \frac{df^{-1}}{dx}(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}(f \circ f^{-1})(x) = 1.$$

Perciò, si ha

$$\frac{df}{dy}(y)\Big|_{y=f^{-1}(x)} \frac{df^{-1}}{dx}(x) = 1.$$

e, di conseguenza, vale la formula di derivazione

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \left(\frac{df}{dy}(y)\Big|_{y=f^{-1}(x)} \right)^{-1} \tag{5}$$

La divisione per $\frac{df}{dy}$ non è possibile nel (malaugurato) caso in cui la derivata di f sia nulla e su questo aspetto torneremo tra poco.

Esempio 2.3 Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ che, ristretta all'insieme $[0, +\infty)$, è invertibile con inversa data da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Calcoliamone dunque la derivata applicando la formula (5):

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \left(\frac{d}{dy}(y^2)\Big|_{y=\sqrt{x}} \right)^{-1} = \left(2y\Big|_{y=\sqrt{x}} \right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Benissimo! Non per niente, ricordando ora la formula di derivazione "elementare" ottenuta in passato, e cioè

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{6}$$

nel caso $\alpha = 1/2$, si ottiene proprio quanto dichiarato in precedenza, e cioè

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}\, x^{1/2-1} = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

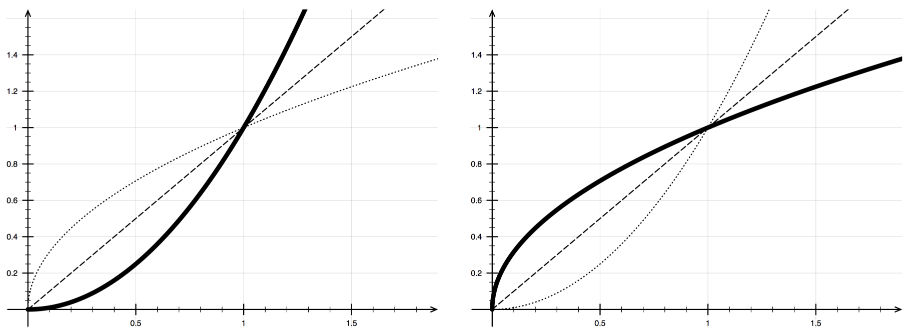

Figura 1: A sinistra, il grafico della funzione $f(x) = x^2$ per $x \geq 0$ e, a destra, quello della sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Cosa succede nell'origine?

Torniamo sulla questione della derivata della funzione inversa che perde di senso nel caso in cui la derivata della funzione originale sia uguale a zero. Bene, si tratta semplicemente della conseguenza immediata della relazione che esiste tra il grafico della funzione e quello della sua inversa, che si ottiene invertendo il ruolo di x e di y, cioè ribaltando il grafico originale attorno alla bisettrice.

Una (bella) figura vale più di mille parole (vedi Fig.1).