L'induzione matematica

Corrado Mascia

14 ottobre 2018

Il procedimento di induzione matematica è un efficace procedimento dimostrativo completamente distinto dall'induzione empirica, che consiste nella deduzione di una affermazione universale a valle di un (elevato) numero di osservazioni empiriche.

Il tacchino: un empirico induttivista

Il *tacchino induttivista* è una celebre metafora ideata dal filosofo e logico Bertrand Russell al fine di confutare la validità in senso assoluto dell'inferenza induttiva per enumerazione, alla base del metodo di induzione empirica.

Ecco come racconta Russell la storia del tacchino (statunitense) determinato a formarsi una visione del mondo fondata sulla scienza.

> *Fin dal primo giorno questo tacchino osservò che, nell'allevamento in cui era stato portato, gli veniva dato il cibo alle 9 del mattino. Da buon induttivista non fu precipitoso nel trarre conclusioni dalle sue osservazioni e ne eseguì altre in una vasta gamma di circostanze: di mercoledì e di giovedì, nei giorni caldi e nei giorni freddi, sia che piovesse sia che splendesse il sole. Così arricchiva ogni giorno il suo elenco di una proposizione osservativa in condizioni più disparate. Finché la sua coscienza induttivista non fu soddisfatta ed elaborò un'inferenza induttiva come questa: "Mi danno il cibo alle 9 del mattino". Questa concezione si rivelò incontestabilmente falsa alla vigilia di Natale, quando, invece di venir nutrito, fu sgozzato.*

Per quanti casi si possano enumerare nel corso di un ragionamento induttivo, nulla e nessuno può garantire che il caso successivo rientrerà anch'esso nell'inferenza indotta dalle osservazioni, in quanto gli esperimenti concepibili sono infiniti. Questo fatto, inequivocabile, mostra come l'induzione empirica non possa essere considerata alla stregua di un metodo dimostrativo rigoroso.

Il metodo di induzione matematica

Indichiamo con $P(n)$ una specifica proprietà associata al numero naturale n. Il *metodo di induzione (matematica)* è un metodo dimostrativo rigoroso dell'affermazione $P(n)$ per ogni n naturale, Più avanti verranno dati vari esempi utili per comprendere il tipo di affermazioni dimostrabili con questo approccio.

Il metodo richiede la dimostrazione di due affermazioni distinte ed indipendenti. La combinazione delle due ha un esito eplosivo...

Passo 1. Base dell'induzione. Dimostrare la validità della proprietà $P(1)$ per il numero naturale $n = 1$.

Passo 2. Passo induttivo. Assumendo valida la proprietà $P(n)$ al passo n, dimostrare la proprietà $P(n + 1)$ per il naturale successivo $n + 1$.

Il motivo per cui il metodo di induzione è considerato una tecnica dimostrativa iterativa. Infatti, la validità di $P(1)$ del Passo 1 implica la validità di $P(2)$, grazie al Passo 2, e quindi quella di $P(3)$, di nuovo grazie al Passo 2, e così via dicendo.

Due esempi, tanto per gradire

Seguendo l'adagio latino *Nihil recto sine exemplo docetur aut discitur*[1], partiamo da due casi prototipo. In entrambi i casi, come si vedrà, compare una identità "congetturata" e poi dimostrata. A spanne, direi che questo è il limite principale del metodo di induzione: occorre avere un'idea sulla formula che si vuole dimostrare per poterlo fare. E non sempre questo è il caso...

Somma dei primi n interi. Vale l'identità

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Qui, l'affermazione $P(n)$ è data dalla formula (1).

[1] Tratta dal Libro XI del *De Re Rustica* di Lucio Iunio Moderato Columella.

Passo 1. Nel caso $n = 1$, il termine a sinistra nell'uguaglianza (1) vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1.$$

Il termine a destra è dato da

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

L'affermazione è quindi dimostrata per $n = 1$.

Passo 2. Si suppone valida la formula (1) e si vuole dimostrare quella con $n+1$ al posto di n, cioè si vuole dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

A questo scopo, si considera la decomposizione del termine a sinistra nella precedente identità come

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1).$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva, si deduce

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Somma dei quadrati dei primi n interi. Vale l'identità

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Questa volta, l'affermazione $P(n)$ è data dalla formula (2).

Passo 1. Questa volta, per $n = 1$, il termine a sinistra in (2) vale

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1.$$

Il termine a destra coincide, essendo dato da

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

L'affermazione è quindi vera nel caso $n = 1$.

Passo 2. Come nel caso precedente, scriviamo prima di tutto la condizione $P(n+1)$ che si vuole dimostrare

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)\{2(n+1)+1\}}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Assumendo dimostrata (2) per n, calcoliamola al passo successivo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\{n(2n+1) + 6(n+1)\} = \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

come mostra un calcolo diretto del prodotto $(n+2)(2n+3)$. Anche in questo caso, dunque, l'identità è dimostrata.