Numeri irrazionali

Corrado Mascia

16 ottobre 2018

È un fatto della vita scoprire che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporto di numeri interi. Cerchiamo prima di tutto di trovarne qualcuno. Eccone una prima lista (altamente incompleta): la radice di 2 (che si scrive $\sqrt{2}$), pi-greco π , il numero di Nepero e , il logaritmo di 3 in base 2 $\log_2 3$, la sezione aurea ϕ ... e tanti altri. Ma, come si dimostra che non sono rapporto di interi? E poi... i numeri irrazionali sono frequenti o sono rari?

1 Esistenza di numeri irrazionali

Partiamo da un esempio tipico di irrazionalità di radice di 2. La dimostrazione è particolarmente istruttiva, perché si basa su un argomento di contraddizione.

Teorema 1.1 *Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che il numero $\sqrt{2}$ sia il rapporto di interi p/q , cioè supponiamo che valga l'identità $\sqrt{2} = p/q$.

Senza perdere in generalità, possiamo supporre che p e q non abbiano fattori comuni, nel senso che, se c'erano all'inizio, sono stati "semplificati". Quindi, per definizione di $\sqrt{2}$ si deve avere

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

Ne segue che

$$p^2 = 2q^2$$

e quindi p^2 è un numero pari. Ma se p^2 è pari, allora anche p deve essere pari¹. Quindi $p = 2r$ per qualche $r \in \mathbb{Z}$. Bene: quindi l'intero p è pari.

Ora, torniamo alla relazione $p^2 = 2q^2$ ed inseriamo l'ultima espressione

$$p^2 = 2q^2 \iff (2r)^2 = 2q^2 \iff 4r^2 = 2q^2 \iff 2r^2 = q^2.$$

Ragionando come per il caso precedente, si deduce che q^2 è pari e dunque anche q è pari, cioè $q = 2s$ per qualche $s \in \mathbb{Z}$.

Ma come la mettiamo con il fatto che p e q non hanno fattori comuni? Ecco la contraddizione e, con un colpo di penna, anche la dimostrazione...

q.e.d.

Ci sono anche altre dimostrazioni di irrazionalità che si basano sull'utilizzo dell'assurdo. Ad esempio, allo stesso modo si dimostra che la radice quadrata di un numero primo p è sempre irrazionale, così come la radice cubica di un numero primo p . E così via dicendo.

Anche altre dimostrazioni di irrazionalità si basano su un ragionamento per contraddizione.

Teorema 1.2 *Il numero $\log_2 3$ non è razionale.*

Dimostrazione. Come nel caso precedente, supponiamo, per assurdo, che invece $\log_2 3$ sia razionale. Allora, si avrebbe

$$\log_2 3 = \frac{p}{q}.$$

Di conseguenza, varrebbe anche $2^{p/q} = 3$. Elevando alla potenza q , si deduce

$$2^p = 3^q.$$

¹Se p fosse dispari si avrebbe $p = 2r + 1$ per qualche $r \in \mathbb{Z}$. Di conseguenza, varrebbe l'uguaglianza

$$p^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4r(r + 1) + 1$$

che mostra che p^2 è dispari...

Ma questa identità è falsa, dato che 2 e 3 non hanno fattori in comune...

q.e.d.

Analogamente si mostra che per ogni coppia di numeri primi p e q , il numero $\log_p q$ è irrazionale.

2 Pochi gli zeri razionali di polinomi a coefficienti interi

I polinomi a coefficienti interi sono un bel numero. Eccone qualcuno

$$P(x) = x - 1, \quad P(x) = x^2 - 2, \quad P(x) = x^2 - x - 1, \quad P(x) = x^3 + 2x + 3x + 4.$$

E come questi tanti altri...

Le radici razionali di polinomi con coefficienti interi sono solo e soltanto quelli della forma p/q con p che divide il termine noto e q che divide il coefficiente di grado massimo. Espresso in matematiche cambia aspetto, ma non sostanza.

Teorema 2.1 *Dato $n \in \mathbb{N}$, sia $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polinomio con $a_k \in \mathbb{Z}$ e a_n e a_0 diversi da zero. Se $x_0 \in \mathbb{Q}$ è tale che $P(x_0) = 0$, allora $x_0 = p/q$ con p e q coprimi, dove p divide a_0 e q divide a_n .*

Dimostrazione. Infatti, se $P(x) = 0$ allora $P(p/q) = 0$ e quindi $a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + \dots + a_1(p/q) + a_0 = 0$. Di conseguenza, moltiplicando per q^n , si deduce

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (1)$$

da cui segue

$$(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) p = -a_0 q^n$$

Non potendo dividere q (dato che non hanno fattori comuni), il numero p deve dividere l'intero a_0 .

Analogamente, dall'uguaglianza polinomio, segue anche

$$(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p q^{n-2} + a_0q^{n-1})q = -a_n p^n,$$

da cui si deduce che, necessariamente, q deve dividere a_n ...

q.e.d.

Quindi, nel caso del polinomio $P(x) = x - 1$ le uniche radici razionali sono il rapporto di interi in cui il numeratore divida -1 e il denominatore divida 1 . Si tratta quindi di due soli numeri razionali possibili -1 e $+1$. Quali di questi è uno zero del polinomio? Solo il secondo. Infatti

$$P(-1) = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \text{e} \quad P(1) = 1 - 1 = 0.$$

Cosa ne è del polinomio $P(x) = x^2 - 2$? Le uniche soluzioni razionali devono avere il numeratore che divide -2 e il denominatore che divide 1 . Si tratta quindi di due numeri interi: -2 e $+2$. Ma nessuna di queste è soluzione del polinomio, infatti

$$P(-2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \neq 0 \quad \text{e} \quad P(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Quindi $\sqrt{2}$ è irrazionale. In questo modo, si dimostra che anche altri numeri sono irrazionali. Ad esempio, le eventuali radici razionali del polinomio $P(x) = x^2 - x - 1$ sono -1 e $+1$. Una verifica diretta mostra che nessuna delle due è radice del polinomio, infatti

$$P(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad P(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1 \neq 0.$$

Quindi, le radici del polinomio $P(x) = x^2 - x - 1$ sono irrazionali. L'espressione esplicita delle radici si deduce con la nota formula per i polinomi di secondo grado

$$P(x) = 0 \quad \iff \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Indicata con $\phi := (1 + \sqrt{5})/2$ la *sezione aurea*, i due zeri del polinomio sono ϕ e $-1/\phi$ e sono entrambi numeri irrazionali.